Penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember Menggunakan Teori Bilangan Dominasi

Ilham Saifudin[1], Reni Umilasari[2]

[1, 2] *Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember*
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email: [1]ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id, [2]reni.umilasari@unmuhjember.ac.id

ABSTRAK

Untuk setiap graf $G = (V, E), S \subseteq V(G)$ dapat dikatakan himpunan dominasi dari G jika setiap simpul $u \in V(G)$ bertetangga dengan S. Dengan demikian untuk setiap simpul $u \in V(G)$, ada simpul $v \in S$ dimana jarak antara u dan v maksimal satu. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi di graf G disebut dengan bilangan dominasi. Pada paper ini akan ditentukan himpunan dominasi jarak dua pada graf G yang didefinisikan dengan $S_2 \subseteq V(G)$, dimana untuk setiap simpul $u \in V(G)$ ada simpul $w \in S_2$ dimana jarak antara u dan w maksimal dua. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi jarak dua di graf G disebut dengan bilangan dominasi jarak dua. Pada Paper ini akan dicari bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle dengan subgraf sebagai penghubung *(linkage)*, diantaranya : $Shack(C_n, P_m, k)$, $Shack(C_n, P_m, k)$, dengan $m \leq \frac{n}{2}$ dan $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m = 2n$. Serta akan dibahas studi kasus bilangan dominasi jarak dua pada penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember, dikarenakan penempatannya sembarang dan tidak menjangkau wilayah di sekitar Kecamatan Sumbersari.

Kata Kunci: Bilangan Dominasi jarak dua, Graf Hasil Operasi Shackle dengan subgraf sebagai penghubung (linkage), Penempatan ATM.

1. PENDAHULUAN

Bilangan dominasi merupakan salah satu topik yang menarik pada teori graf. Bilangan dominasi sudah ada sejak tahun 1850, bilangan dominasi ini muncul pada kalangan penggemar catur di Eropa yaitu penentuan berapa banyaknya ratu yang harus ditempatkan pada papan catur 8 × 8, sehingga semua petak pada papan catur dapat dikuasai oleh ratu dan jumlah ratu yang diletakkan pada papan catur harus minimal. Hasil penelitian sebelumnya diantaranya tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi oleh Wicha dan Slamin (Slamet, 2009).

Bilangan dominasi dapat dikatakan sebagai banyaknya simpul pendominasi dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung disekitarnya, dengan simpul pendominasi berjumlah minimal. Bilangan dominasi dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Bilangan dominasi juga telah banyak diaplikasikan dalam kehidupan. Sebagai contoh pada penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, penempatan CCTV pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu, dan lain-lain. Tujuan menerapkan himpunan dominasi pada penempatan mobil listrik ataupun CCTV yaitu agar lebih efisien dalam menempatkannya serta dapat meminimalisir jumlahnya, sehingga lebih maksimal dalam penggunaannya.

Dalam paper ini penulis meneliti bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi shackle dengan subgraf sebagai penghubung *(linkage)*, diantaranya: $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$, $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ dan $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan $m = 2n$. Serta akan dibahas studi kasus bilangan dominasi jarak dua paada penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamataan Sumbersari Kabupaten Jember. Alasannya, dikarenakan penempataannya sembarang dan tidak menjangkau wilayah di sekitar Kecamataan Sumbersari.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Himpunan Dominasi dan Bilangan Dominasi

Himpunan dominasi (dominating set) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Haynes, T. W, et al. 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (dominating number) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2 (Darmaji, et al. 2014), (Sridharan, N, et al. 2002), dan (Umilasari, R. 2015). Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam menentukan simpul dominasi pada sebarang graf dapat menggunakan sebuah algoritma yang dinamakan algoritma greedy (Munir, R. 2004).

Lema yang digunakan.

Lema 1*. Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf reguler G berderajat r adalah $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$*

Bukti. Graf G adalah graf reguler jumlah simpul sebanyak $|V|$ dan derajat setiap simpul adalah r. Berdasarkan observasi, simpul maksimal yang dapat didominasi oleh sebuah simpul pendominasi adalah $r^2 + 1$. Dengan demikian jumlah minimal simpul pendominasi adalah $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$. Jadi, $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul di graf G. Andaikan $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $r^2 + 1\left(\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil\right) - 1 \leq r^2 + 1\left(\frac{|V|+r^2}{r^2+1} - 1\right) = |V| - 1$. Artinya, banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $|V| - 1$, maka terdapat minimal satu simpul yang belum terdominasi. Dengan demikian $S_2 = \gamma_2(G) \neq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1$. Karena $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$ adalah jumlah minimal simpul pendominasi yang dapat mendominasi semua simpul di G maka $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$.

Lema 2*. Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf G adalah*

$$\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rceil.$$

(Vikade et al, 2016)

Bukti. Graf G adalah sebarang graf dengan jumlah simpul sebanyak $|V|$, misal x adalah sebuah simpul dengan derajat maksimal $\Delta(G)$ maka x sebagai himpunan dominasi dan $N_2[x]$ merupakan simpul berjarak dua dari x. Sehingga $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal. Andai $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah$1+\Delta(G)+\sum N_2\left(\left\lceil\frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2}\right\rceil-1\right)\leq 1+\Delta(G)+\sum N_2$ $\left(\frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2}-1\right)=|V|-1$. Artinya banyak simpul yang dapat didominasi adalah $|V|-1$, maka terdapat minimal satu simpul yang tidak didominasi. Dengan demikian $S_2=\gamma_2(G)\neq\left\lceil\frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2}\right\rceil-1$, karena $\left\lceil\frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2}\right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal maka $\gamma_2(G)\geq\left\lceil\frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2}\right\rceil$.

2.2 Operasi Shackle dengan Subgraf Sebagai Penghubung (Linkage)

Graf Shackle dengan subgraf sebagai penghubung (linkage) dinotasikan $Shack(G,H,k)$, dimana Graf $Shack(G,H,k)$ merupakan graf hasil operasi Shackle pada graf (G) dengan subgraf pada graf (H) sebagai penghubung sebanyak $k-salinan$.

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Selain itu metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah. Penelitian ini akan menghasilkan teorema-teorema baru yang telah dibuktikan secara deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada hasil penelitian akan dibahas tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle dengan subgraf sebagai penghubung yaitu $Shack(C_n,P_m,k)$ dengan $m\leq\frac{n}{2}$, $Shack(C_n,C_m,k)$ dengan $m\leq\frac{n}{2}$ dan $Shack(C_n,S_m,k)$ dengan $m=2n$. Selain itu dibahas juga mengenai aplikasi bilangan dominasi berupa penempatan Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember menggunakan Teori Bilangan Dominasi. Untuk lebih jelasnya dapat dilihat penjelasan dibawah ini.

4.1 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf $\boldsymbol{Shack(C_n,P_m,k)}$

Berikut disajikan Teorema 1 mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi $Shack(C_n,P_m,k)$ dengan $m\leq\frac{n}{2}$.

◊ **Teorema 1.** *Diberikan graf C_n sebanyak k salinan, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sub graf P_m adalah*

$$\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)=\begin{cases}\left\lceil\frac{k}{2};\right\rceil & untuk\ n<5\\ k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil; & untuk\ n\geq 5\end{cases}$$

Bukti.

Untuk $n<5$ dan $m=2$ dapat mendominasi maksimal sebanyak 2 salinan graf G. Dengan demikian jumlah simpul pendominasi yang dibutuhkan pada graf $Shack(C_n,P_m,k)$ dengan $n<5$ dan $m=2$ adalah $\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ adalah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada $Shack(C_n,P_m,k)$. Andai

$\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-1$, maka salinan maksimal yang dapat didominasi sampai jarak 2 adalah $2k\left(\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-1\right)\leq 2k\left(\frac{k+2k-1}{2k}-1\right)=k-1$. Dengan demikian jumlah salinan maksimal yang dapat didominasi adalah $k-1$, sehingga terdapat minimal satu salinan graf yang tidak dapat didominasi, maka $\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)\neq\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil-1$. Karena $\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua salinaan graf, maka $\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)=\left\lceil\frac{k}{2}\right\rceil$.

Untuk $n\geq 5$ dengan jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke-k, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n,P_m,k)$ akan menbentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 1. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n,P_m,k)$

Jumlah Salinan ($\boldsymbol{k}$)	**Bilangan Kardinalitas ($\boldsymbol{\gamma_2}$)**
1	$\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil$
2	$2\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$
3	$3\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-2\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$
4	$4\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-3\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$
⋮	⋮
k	$k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n,P_m,k)$ sebanyak k salinan adalah $k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$. Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

- Akan dibuktikan untuk $k=1$ adalah benar.

$$\gamma_2(Shack(C_n,P_m,k))\ =k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n,P_m,k)) =k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n,P_m,k)) =1\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(1-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

$$\Leftrightarrow \left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil=\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil$$

- Asumsikan untuk $k=t$ adalah benar.

$$\gamma_2(Shack(C_n,P_m,t)) =t\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(t-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

- Akan dibuktikan untuk $k=t+1$ juga benar.

$$\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,t+1)\big) =\gamma_2\big(Shack(C_n,P_m,t+1)\big) +beda\ barisan$$

$$t+1\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(t+1-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil =t\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(t-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

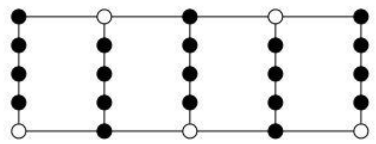
$$t+1\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-t\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil=t+1\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil-t\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

Dengan demikian $\gamma_2(Shack(C_n,P_m,k))=k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$ untuk $n\geq 5$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n,P_m,k)$. Andaikan $\left|S_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)\right|=k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil-1$, maka simpul pendominasi oleh $|S_2|$ adalah $1+3+N_2\left(\left\lceil\frac{kn-(k-1)m}{1+3+N_2}\right\rceil-1\right)\leq 4+N_2\left(\frac{kn-(k-1)m+4+N_2-1}{4+N_2}-1\right)=kn-(k-1)m-1$. Dengan demikian tidak semua simpul didominasi, sehingga $\left|S_2\big(Shack(C_n,P_m,k)\big)\right|\neq k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil-1$. Karena $k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$

adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa

$$\gamma_2(Shack(C_n, P_m, k)) = k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \blacksquare$$

Untuk memperkuat bukti disjikan contoh graf yang dapat dilihat pada Gambar 1. Pada gambar tersebut merupakan graf $Shack(C_{10}, P_5, 4)$ yang dikonstruksi dari graf Sikel C_{10} sebanyak 4 salinan dengan graf P_5 sebagai penghubung (*linkage*) sub graf yang menghubungkan antara G_i dan G_{i+1}. Graf Sikel C_{10} memiliki $\gamma_2(P_5) = 1$. Maka berdasarkan Teorema 1 hasil dari $\gamma_2\big(Shack(C_{10}, P_5, 4)\big) = 5$.



Gambar 1. Graf Hasil Operasi $Shack(C_{10}, P_5, 4)$ dengan simpul putih adalah simpul pendominasi

4.2 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf $\boldsymbol{Shack(C_n, C_m, k)}$

Berikut disajikan Teorema 2 mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \le \frac{n}{2}$.

◊ **Teorema 2.** *Diberikan graf C_n sebanyak k salinan, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sub graf C_m adalah*

$$\gamma_2\big(Shack(C_n, C_m, k)\big) = k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil; \quad untuk\ n \ge 5$$

Bukti.
Untuk $n \ge 5$ dengan jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke-k, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, C_m, k)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 2. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n, C_m, k)$

Jumlah Salinan ($\boldsymbol{k}$)	**Bilangan Kardinalitas ($\boldsymbol{\gamma_2}$)**
1	$\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$
2	$2\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$
3	$3\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 2\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$
4	$4\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - 3\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$
⋮	⋮
k	$k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua gari graf $Shack(C_n, C_m, k)$ sebanyak k salinan adalah $k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$. Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

- Akan dibuktikan untuk $k = 1$ adalah benar.

$$\gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$$
$$\Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$$
$$\Leftrightarrow \gamma_2(Shack(C_n, C_m, k)) = 1\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (1-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$$
$$\Leftrightarrow \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$$

- Asumsikan untuk $k = t$ adalah benar.

$$\gamma_2(Shack(C_n, C_m, t)) = t\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (t-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$$

- Akan dibuktikan untuk $k = t + 1$ juga benar.

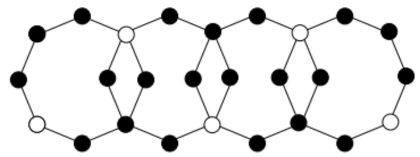
$$\gamma_2\big(Shack(C_n, C_m, t+1)\big) = \gamma_2\big(Shack(C_n, C_m, t+1)\big) + beda\ barisan$$

$$t+1\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(t+1-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$
$$=t\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(t-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil+\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$
$$t+1\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-t\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil=t+1\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil-t\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$$

Dengan demikian $\gamma_2(Shack(C_n,C_m,k)) = k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$ untuk $n \geq 5$, selanjutnya akan dibuktikan bahwa $k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n,C_m,k)$. Andaikan $\left|S_2\big(Shack(C_n,C_m,k)\big)\right| = k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil-1$, maka simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $|S_2|$ adalah $1+3+N_2\left(\left\lceil\frac{kn-(k-1)m}{1+3+N_2}\right\rceil-1\right) \leq 4+N_2\left(\frac{kn-(k-1)m+4+N_2-1}{4+N_2}\right)=kn-(k-1)m-1$.

Dengan demikian tidak semua simpul didominasi, sehingga $\left|S_2\big(Shack(C_n,C_m,k)\big)\right| \neq k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil-1$. Alasanya, karena $k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa $\gamma_2(Shack(C_n,C_m,k)) = k\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil-(k-1)\left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil$. ■

Untuk memperkuat bukti disajikan contoh graf yang dapat dilihat pada Gambar 2. Pada gambar tersebut merupakan graf $Shack(C_8,C_4,4)$ yang dikonstruksi dari graf sikel C_8 sebanyak 4 salinan dengan graf C_4 sebagai *linkage* sub graf yang menghubungkan antara G_i dan G_{i+1}. Graf sikel C_8 memiliki $\gamma_2(C_4)=1$. Maka berdasarkan Teorema 2 hasil dari $\gamma_2\big(Shack(C_8,C_4,4)\big)=5$.



Gambar 2. Graf Hasil Operasi $Shack(C_8,C_4,4)$ dengan simpul putih adalah simpul pendominasi

4.3 Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf $Shack(C_n,S_m,k)$

Berikut disajikan Teorema 3 mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi $Shack(C_n,S_m,k)$ dengan $m=2n$.

◊ **Teorema 3.** *Diberikan graf C_n sebanyak k salinan, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi Shackle sub graf S_m adalah*

$$\gamma_2\big(Shack(C_n,S_m,k)\big) = \begin{cases} \frac{k-1}{2} & untuk\ k\ ganjil \\ \frac{k}{2}; & untuk\ k\ genap \end{cases}$$

Bukti.

Untuk jumlah salinan k ganjil, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n,S_m,k)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 3. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n,S_m,k)$ dengan k Ganjil

Jumlah Salinan $(\boldsymbol{k})$	**Bilangan Kardinalitas** $(\boldsymbol{\gamma_2})$
3	$\frac{3-1}{2}$
5	$\frac{5-1}{2}$
7	$\frac{7-1}{2}$
9	$\frac{9-1}{2}$
⋮	⋮
k	$\frac{k-1}{2}$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n, S_m, k)$ sebanyak k salinan dengan k ganjil adalah $\frac{k-1}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\frac{k-1}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$. Andaikan $\left|S_2\left(Shack(C_n, S_m, k)\right)\right| = \frac{k-1}{2} - 1$, maka simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $|S_2|$ adalah $2n + 3\left(\left\lceil\frac{kn+k-1}{2n\neq3}\right\rceil - 1\right) \leq$
$2n + 3\left(\frac{kn+k-1+2n+3-1}{2n+3} - 1\right) = kn + k - 2.$
Dengan demikian tidak semua simpul didominasi,
sehingga$\left|S_2\left(Shack(C_n, S_m, k)\right)\right| \neq \frac{k-1}{2} - 1.$
Alasannya, karena $\frac{k-1}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa $\gamma_2\left(Shack(C_n, S_m, k)\right) = \frac{k-1}{2}$ untuk k ganjil.

Untuk jumlah salinan k genap, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$ akan membentuk barisan aritmatika yang dapat dilihat pada tabel berikut ini.

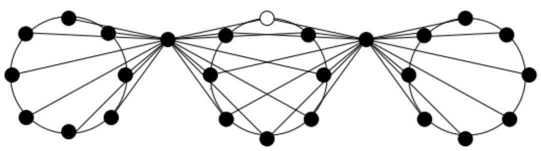
Tabel 4. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan k Genap

Jumlah Salinan (k)	**Bilangan Kardinalitas (γ_2)**
2	$\frac{2}{2}$
4	$\frac{4}{2}$
6	$\frac{6}{2}$
8	$\frac{8}{2}$
⋮	⋮
k	$\frac{k}{2}$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf $Shack(C_n, S_m, k)$ sebanyak k salinan dengan k genap adalah $\frac{k}{2}$.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\frac{k}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Shack(C_n, S_m, k)$. Andaikan $\left|S_2\left(Shack(C_n, S_m, k)\right)\right| = \frac{k}{2} - 1$, maka simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $|S_2|$ adalah $2n + 3\left(\left\lceil\frac{kn+k-1}{2n\neq3}\right\rceil - 1\right) \leq$
$2n + 3\left(\frac{kn+k-1+2n+3-1}{2n+3} - 1\right) = kn + k - 2.$
Dengan demikian tidak semua simpul didominasi sehingga $\left|S_2\left(Shack(C_n, S_m, k)\right)\right| \neq \frac{k}{2} - 1.$ Alasannya, karena $\frac{k}{2}$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal, maka terbukti bahwa $\gamma_2\left(Shack(C_n, S_m, k)\right) = \frac{k}{2}$ untuk k genap.

Untuk memperkuat bukti disajikan contoh graf yang dapat dilihat pada Gambar 3. Pada gambar tersebut merupakan graf $Shack(C_8, S_8, 3)$ yang dikonstruksi dari graf sikel C_8 sebanyak 3 salinan dengan graf S_8 sebagai *linkage* sub graf yang menghubungkan antara G_i dan G_{i+1}. Graf sikel C_8 memiliki $\gamma_2(S_8)$. Maka berdasarkan Teorema 3 hasil dari $\gamma_2\left(Shack(C_8, S_8, 3)\right) = 1.$

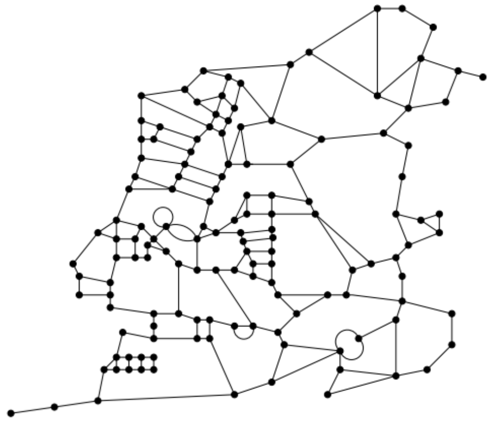


Gambar 3. Graf Hasil Operasi $Shack(C_8, S_8, 3)$ dengan simpul putih adalah simpul pendominasi

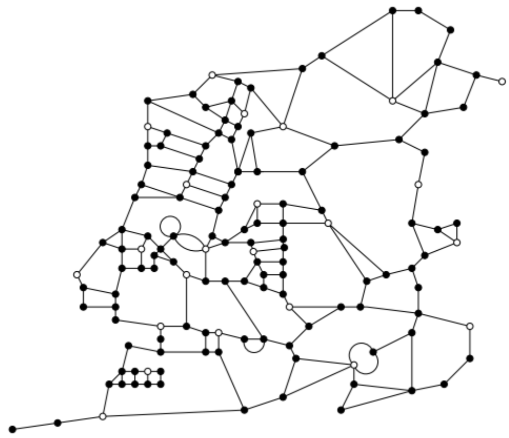
4.4 Studi Kasus Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Peta Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember

Pada bagian ini akan dibahas mengenai morfologi peta Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember. Peta Kecamatan Sumbersari dapat dilihat pada Gambar 4. Langkah awal adalah menentukan peta ke dalam sebuah graf. Kemudian gambar tersebut direpresentasikan menjadi $J-Graf$, dimana $J-Graf$ merupakan merepresntasikan graf dengan persimpangan jalan sebagai simpul dan setiap jalan direpresentasikan sebagai sisi. Representasi $J-Graf$ dari peta Kecamatan Sumbersari dapat dilihat pada Gambar 5. Dari representasi graf tersebut akan ditetapkan lokasi Anjungan Tunai Mandiri (ATM) pada simpul-simpul tertentu, sehingga dengan menggunakan Teori Bilangan Dominasi jarak 2 akan didapat jumlah ATM seminimal mungkin tanpa mengurangi efisiensinya.

Gambar 4. Peta Kecamatan Sumbersari Jember



Gambar 5. J-Graf Peta Kecamatan Sumbersari



Gambar 6. J-Graf Peta Kecamatan Sumbersari dengan Simpul Putih adalah Simpul Pendominasi

Berdasarkan analisis terhadap Gambar 6 diperoleh bilangan dominasi sebanyak 23. Analisis dilakukan terhadap simpul-simpul pendominasi yang dapat mendominasi simpul terhubung berjarak maksimal dua. Simpul-simpul pendominasi tersebut dapat dilihat pada Gambar 6. Sehingga penempatan ATM dapat diletakkan pada simpul-simpul pendominasi dan hanya dibutuhkan 23 mesin ATM pada Kecamatan Sumbersari.

Menurut Haynes et al (1996) telah menemukan batas bawah dan batas atas pada bilangan dominasi jarak satu yaitu $\left\lceil \frac{p}{1+\Delta(G)} \right\rceil \le \gamma(G) \le p-\Delta(G)$. Pada $J-Graf$ Kecamatan Sumbersari Jember memiliki simpul sebanyak 135 dan derajat maksimal $\Delta(J-Graf)$ adalah 5. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua sesuai dengan batas yaitu $23 \leq \gamma_2(J-Graf) \leq 130$.

5. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut:

1) bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi Shackle dengan sub graf sebagai penghubung *(linkage)* yaitu $Shack(C_n, P_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ adalah

$$\gamma_2\big(Shack(C_n, P_m, k)\big) = \begin{cases} \left\lceil \frac{k}{2}; \right\rceil & untuk\ n < 5 \\ k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil; & untuk\ n \geq 5 \end{cases}$$

2) bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi Shackle dengan sub graf sebagai penghubung *(linkage)* yaitu $Shack(C_n, C_m, k)$ dengan $m \leq \frac{n}{2}$ adalah

$$\gamma_2\big(Shack(C_n, C_m, k)\big) = k\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil - (k-1)\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil; \quad untuk\ n \geq 5$$

3) bilangan dominasi jarak dua graf hasil operasi Shackle dengan sub graf sebagai penghubung *(linkage)* yaitu $Shack(C_n, S_m, k)$ dengan $m = 2n$ adalah

$$\gamma_2\big(Shack(C_n, S_m, k)\big) = \begin{cases} \frac{k-1}{2} & untuk\ k\ ganjil \\ \frac{k}{2}; & untuk\ k\ genap \end{cases}$$

4) $J-Graf$ yaitu Peta Kecamatan Sumbersari Kabupaten Jember menggunakan Teori Bilangan Dominasi $\gamma_2(J-Graf)$ adalah 23.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua, maka peneliti memberikan masalah terbuka kepada pembaca yang berminat meneliti di bidang ini yaitu menentukan batas atas dan bawah bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf.

DAFTAR PUSTAKA

Darmaji dan Umilasari, R. 2014. *"Dominating Set Berjarak Dua pada Graf Jahangir dan Prisma"*. Tidak Diterbitkan. Paper. Surabaya: ITS.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., dan Slater, P. J. 1996. *Fundamental of Dominations in Graphs*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Munir, R. 2004. *Algoritma Greedy*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.

Slamin. 2009. *Desain Jaringan Pendekatan Teori Graf*. Jember: Universitas Jember

Sridharan, N., Subramanian, V. S. A dan Elias, M. D. 2002. *Bounds on the Distance Two-Domination Number of Graph. Graphs and Combinatorics*. 18: 667-675.

Umilasari, R. 2015. *"Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb".* Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: ITS.

Vikade, W. D. 2016. *"Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi".* Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember.