Perbandingan Bilangan Dominasi Jarak Satu dan Dua pada Graf Hasil Operasi *Comb*

Reni Umilasari[1)]
[1)]*Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember*
Email : [1)]reni.umilasari@gmail.com

ABSTRAK

Himpunan dominasi S pada graf $G = (V, E)$ adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 memiliki jarak maksimal dua terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari graf $G\gamma_2(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam penelitian ini ditentukan bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan (P_m), graf Lingkaran (C_n), serta graf Bintang (S_m) yang terdiri dari graf $P_m \rhd P_n$,$P_m \rhd C_n$, $P_m \rhd S_n$,$C_n \rhd P_m$,$C_n \rhd C_m$ dan $C_n \rhd S_m$. Selanjutnya, akan dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari hasil yang diperoleh.

Kata kunci : bilangan dominasi, himpunan dominasi, graf bintang, graf lingkaran, graf lintasan, operasi *comb*

1. PENDAHULUAN

Dominating secara matematis dikenalkan pada awal tahun 1960. Sejak saat itu baik himpunan dominasi maupun bilangan dominasi banyak digunakan dalam berbagai aplikasi. Salah satu contoh aplikasi dari bilangan dominasi adalah menentukan banyaknya pos pertolongan pertama pada suatu wilayah yang terjadi bencana alam. Misalkan wilayah tersebut terdiri dari banyak desa-desa kecil. Simpul dari graf mewakili desa-desa di wilayah tersebut. Sisi yang menghubungkan dua simpul menunjukkan bahwa pos pertolongan pertama darurat didirikan di salah satu desa yang juga dapat melayani desa lainnya. Kemudian, himpunan dominasi minimum dari graf akan merepresentasikan cara melayani seluruh wilayah dengan jumlah pos pertolongan pertama yang minimum.

Operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi dalam graf, misalnya operasi join (+), gabungan (∪), kartesian (×), korona (⊙), dan operasi *comb* (⊳). Misalkan G dan H adalah graf terhubung dan *u* adalah simpul di H. Operasi *comb* dari graf G dan graf H dinotasikan dengan $G \rhd H$ adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian G dan | G | kopian dari H dan melekatkan simpul *u* dari masing-masing graf H kopian ke-*i* pada simpul ke-*i* dari graf G (Saputro et. al., 2013).

Himpunan dominasi (*dominating set*) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap *S*. Kardinalitasminimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (*dominating number*) dari graf G dan dinotasikan γ(*G*) (Haynes & Teresa, 1996). Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua dari graf $G\,\gamma_2(G)$

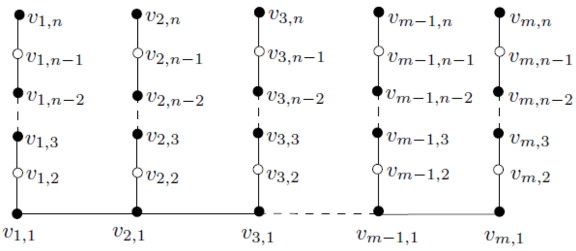
adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam artikel ini ditentukan bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan (P_m) graf Lingkaran (C_n), serta graf Bintang (S_m) yang terdiri dari graf $P_m \rhd P_n$,$P_m \rhd C_n$, $P_m \rhd S_n$, $C_n \rhd P_m$, $C_n \rhd C_m$ dan $C_n \rhd S_m$. Selanjutnya, akan dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari hasil yang diperoleh.

2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini meliputi: (a) Mengkonstruksi graf hasil operasi *comb* antara Lintasan (P_m), lingkaran (C_n), serta bintang (S_n). (b) Menentukan himpunan dominasi minimum jarak satu dan dua dari graf hasil operasi *comb*. (c) Menentukan hipotesis bilangan dominasi jarak satu dan dua berdasarkan penentuan himpunan dominasi minimum. (d) Membuktikan hipotesis bilangan dominasi dari masing-masing graf. (e) Menentukan relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari masing-masing graf.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini diperoleh hasil mengenai bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf $P_m \rhd P_n$,$P_m \rhd C_n$, dan $P_m \rhd S_n$. Bilangan dominasi jarak satu graf hasil operasi *comb* tidak dapat digeneralisasi untuk sebarang dua graf. Hal ini dikarenakan nilai bilangan dominasi pada masing-masing graf hasil operasi *comb* pasti berbeda, yaitu tergantung pada graf yang dioperasikan dan simpul yang dilekatkan. Graf $P_m \rhd P_n$, diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung P_n pada setiap simpul P_m. Untuk simpul graf C_n yang dilekatkan pada P_m dipilih sebarang simpul, sedangkan graf $P_m \rhd S_n$ diperoleh dengan melekatkan salah satu pendant S_n pada setiap simpul P_m.



Gambar 1. Graf $P_m \rhd P_n$ untuk $n \equiv 0\ (mod\ 3)$ dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

⋄**Teorema 0.1** *Diberikan dua buah graf lintasan P_m dan P_n dengan masing-masing ordernya mdan n untuk m, n ≥ 2. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb$P_m \rhd P_n$adalah*

$$\gamma(P_m \rhd P_n) = \begin{cases} m\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, jika\ n \equiv 0\ (mod\ 3) dan\ n \equiv 2 (mod\ 3) \\ m\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil, jika\ n \equiv 1\ (mod\ 3) \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $V(P_m \rhd P_n) = \{V_{i,j} \mid 1 \le i \le m, 1 \le j \le n\}$ dan $|P_m \rhd P_n| = mn$. Untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf $P_m \rhd P_n$, maka untuk masing-masing nilai *n* akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul *S* merupakan elemen simpul P_m dan P_n, sedangkan kasus kedua jika *S* hanya diambil dari simpul-simpul P_n.

a. *n* ≡ 0 (mod 3)

Kasus 1 : $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

Ambil simpul-simpul P_m sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu, yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3, dengan asumsi simpul yang berderajat tinggi dapat mendominasi lebih banyak simpul. Sehingga untuk setiap $v_{i,1}$dan $deg(v_{i,1}) = 3$, maka $v_{i,1}$ dapat menjangkau maksimal 4 simpul, diantaranya $v_{i,1}$, $v_{i-1,1}$, $v_{i+1,1}$ dan $v_{i,2}$. Karena

$v_{i,1}$ dengan $1 \leq i \leq m$ merupakan Lintasan dengan m simpul, sehingga sesuai Goddarddan Henning (2006) maka bilangan dominasi jarak satu pada P_m adalah $\gamma(P_m) = \lceil\frac{m}{3}\rceil$.Simpul-simpul P_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil\frac{m}{3}\rceil$ kali graf. Lintasan P_{n-2}dan $m-\lceil\frac{m}{3}\rceil$kali graf Lintasan P_{n-1}. Dengan demikian dapat ditentukan bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \lceil\frac{n-1}{3}\rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \lceil\frac{n-2}{3}\rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 0 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \frac{n}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $P_m \rhd P_n$ untuk kasus pertama adalah

$$\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\left(\frac{n}{3}\right) + \left(m - \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\right)\left(\frac{n}{3}\right) + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil = \frac{mn}{3} + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$$

Kasus 2 : $S \in V(P_n)$

Karena graf $P_m \rhd P_n$ diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung P_n pada setiap simpul P_m, maka dapat dikatakan bahwa graf $P_m \rhd P_n$ merupakan graf yang terdiri dari m kali Lintasan P_n. Karena $\gamma(P_n) = \lceil\frac{n}{3}\rceil$ dan $n \equiv 0 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_n) = \frac{n}{3}$, sehingga

$$\gamma(P_m \rhd P_n) \leq m(\gamma(P_n)) = \frac{mn}{3}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{mn}{3} \leq \frac{mn}{3} + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$, maka bilangan dominasi pada $P_m \rhd P_n$ lebih minimal jika dipilih simpul-simpul elemen S pada $V(P_n)$. Dengan demikian, diambil batas atas bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \rhd P_n$ yaitu $\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \frac{mn}{3}$.

Selanjutnya untuk menunjukkan apakah $\frac{mn}{3}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum, dimisalkan $\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \frac{mn}{3} - 1$. Karena setiap simpul pada S maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $n \equiv 0 \pmod 3$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{mn}{3} - 1\right)3 = mn - 3 < mn$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul atau order pada $P_m \rhd P_n$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Hal tersebut menunjukkan bahwa $\gamma(P_m \rhd P_n) \nleq \frac{mn}{3} - 1$dan $\frac{mn}{3}$ merupakan bilangan dominasi minimum pada $P_m \rhd P_n$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(P_m \rhd P_n) = \frac{mn}{3}$.

Sebagai contoh perhatikan Gambar 1, tanpa mengurangi perumuman jika $v_{i,2}$ bukan elemen dari S maka simpul $v_{i,3}$, $v_{i,2}$, dan $v_{i,1}$ tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen S.

b. $n \equiv 1 \pmod 3$

Kasus 1 : $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

Sama seperti pembuktian sebelumnya, jika simpul-simpul P_m diambil sebagai simpul elemen S, yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3, maka $\gamma(P_m) = \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ dan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ simpul adalah $4\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ simpul. Simpul-simpul P_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ kali graf Lintasan P_{n-2} dan $m - \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$ kali graf Lintasan P_{n-1}. Sehingga, dapat ditentukan bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \left\lceil\frac{n-1}{3}\right\rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \left\lceil\frac{n-2}{3}\right\rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 1 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \frac{n-1}{3}$. Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada $P_m \rhd P_n$jika $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$ adalah

$$\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\left(\frac{n-1}{3}\right) + \left(m - \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right) + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$$

$$= \frac{m(n-1)}{3} + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$$

Kasus 2 : $S \in V(P_n)$

Karena $n \equiv 1 \pmod 3$ dan $\gamma(P_n) = \left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$ maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_n) = \left\lceil\frac{n+2}{3}\right\rceil$. Sehingga,

$\gamma(P_m \rhd P_n) \leq m(\gamma(P_n))$
$= \frac{m(n+2)}{3}$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa $\frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+2)}{3}$. Dengan demikian, batas atas minimal bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \rhd P_n$ yang diambil adalah $\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

Untuk menunjukkan batas bawah, terlebih dahulu akan dijelaskan banyaknya simpul maksimal yang dapat didominasi oleh masing-masing simpul seperti berikut ini.

(i.) Untuk $S \in P_m$
Karena satu simpul S pada P_m maksimal dapat mendominasi 4 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $4\lceil \frac{m}{3} \rceil$.

(ii.) Untuk $S \in P_{n-1}$
Karena satu simpul S pada P_{n-1} maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan n ≡ 1 (mod 3), maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(m - \lceil \frac{m}{3} \rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right)$

(iii.) Untuk $S \in P_{n-2}$
Karena satu simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan $|P_{n-2}| = n-2$ mengakibatkan $n \equiv 2 \pmod 3$, maka untuk setiap P_{n-2} terdapat $n-4$ simpul yang masing-masing mendominasi 3 simpul dan satu simpul mendominasi 2 simpul. Sehingga banyak simpul yang dapat didominasi adalah $3\left(\lceil \frac{m}{3} \rceil \left(\frac{n-4}{3}\right)\right) + 2\left(\lceil \frac{m}{3} \rceil \cdot 1\right)$.

Berikutnya untuk menunjukkan $\frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ adalah bilangan dominasi yang paling minimum dimisalkan $\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ dan diasumsikan simpul yang berkurang merupakan simpul anggota $V(P_m)$. Sehingga dari (i.) sampai (iii.) banyak simpul maksimal yang dapat didominasi yaitu

$$4\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right) + 3\left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil\right)\left(\frac{n-1}{3}\right) + \left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-4}{3}\right)\right) + 2\left(\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \cdot 1\right)$$
$$= mn - m + 2\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 4 < mn$$

Karena banyaknya simpul yang terdominasi lebih kecil dari banyaknya simpul pada $P_m \rhd P_n$ maka $\gamma(P_m \rhd P_n) \nleq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$. Sehingga terbukti bahwa $\gamma(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$.

c. $n \equiv 2 \pmod 3$

Kasus 1 : $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

Untuk $n \equiv 2 \pmod 3$ pada kasus pertama juga diambil simpul-simpul P_m yang berderajat 3 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Karena $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ dan simpul-simpul P_n yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada $\lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{n-2} dan $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$ kali graf Lintasan P_{n-1} dengan $\gamma(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n-1}{3} \right\rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$. Karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 2 \pmod 3$, maka dapat ditulis bahwa $\gamma(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n+1}{3} \right\rceil$ dan $\gamma(P_{n-2}) = \left\lceil \frac{n-2}{3} \right\rceil$. Oleh karena itu, banyak simpul S pada $P_m \rhd P_n$ adalah

$$\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \left(\frac{n-2}{3}\right) + \left(m - \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil\right)\left(\frac{n+1}{3}\right) + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$$
$$= \frac{m(n+1)}{3}$$

Kasus 2 : $S \in V(P_n)$

Sama seperti kasus 2 pada $n \equiv 0 \pmod 3$ dan $n \equiv 1 \pmod 3$, maka $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$ dan dapat dituliskan $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$. Sehingga bilangan dominasi jarak satu pada $P_m \rhd P_n$ adalah

$(P_m \rhd P_n) \leq m(\gamma(P_n))$
$= \frac{m(n+1)}{3}$

Baik kasus 1 maupun kasus 2 menunjukkan nilai batas atas minimal yang sama, yaitu $\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n+1)}{3}$, dengan S dapat diambil dari simpul-simpul elemen P_n. Hal ini mengakibatkan pada setiap P_n terdapat $\frac{n-2}{3}$ simpul yang masing-masing dapat mendominasi 3 simpul dan satu buah simpul yang mendominasi 2 simpul, karena $n \equiv 2 \pmod 3$). Sehingga untuk m buah P_n pada $P_m \rhd P_n$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $3\left(m\left(\frac{n-2}{3}\right)\right) + 2(m \cdot 1)$.

Andaikan $\gamma(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n+1)}{3} - 1$, misalkan diambil sebuah simpul pada P_n yang seharusnya dapat mendominasi maksimal 3 simpul sedemikian bukan elemen S. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$3\left(m\left(\frac{n-2}{3} - 1\right)\right) + 2(m \cdot 1) = mn - 3 < mn$$

Pernyataan di atas juga menunjukkan bahwa banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $P_m \rhd P_n$. Sehingga $\gamma(P_m \rhd P_n) \nleq \frac{m(n+1)}{3} - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma(P_m \rhd Pn = \mathrm{mn+13}$.

Pada pembuktian di atas telah ditunjukkan bahwa bilangan dominasi untuk $n \equiv 0$ (mod3) dan $n \equiv 2 \pmod 3$ masing-masing $\gamma(P_m \rhd P_n) = \frac{mn}{3}$ dan $\gamma(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n+1)}{3}$. Kedua pernyataan tersebut dapat digabung sedemikian $\gamma(P_m \rhd P_n) = m\left\lceil\frac{n}{3}\right\rceil$. Sedangkan untuk $n \equiv$ 1(mod 3), $\gamma(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil = m\left\lfloor\frac{n}{3}\right\rfloor + \left\lceil\frac{m}{3}\right\rceil$.

Sedangkan untuk bilangan dominasi jarak dua, berikut ini juga akan ditunjukkan graf $P_m \rhd P_n$ sebagai perbandingan pembuktian dengan bilangan dominasi jarak satu seperti pada Teorema 1.

◊**Teorema 0.2** *Diberikan dua buah graf lintasan $P_m \rhd P_n$ dengan masing-masing ordernya m dan n untuk $m, n \geq 2$. Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi comb$P_m \rhd P_n$ adalah*

$$\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \begin{cases} m\left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil, jika\ n \equiv 0 \pmod 5), n \equiv 3 \pmod 5), n \equiv 4 \pmod 5) \\ m\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + \left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil, jika\ n \equiv 1 \pmod 5) \\ m\left\lfloor\frac{n}{5}\right\rfloor + \left\lceil\frac{m}{5}\right\rceil, jika\ n \equiv 2 \pmod 5) \end{cases}$$

Bukti. Misalkan $V(P_m \rhd P_n) = \{V_{i,j} \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$ dan $|P_m \rhd P_n| = mn$. Berdasarkan definisi operasi *comb*, maka simpul ujung P_n yang melekat pada graf P_m dapat dikatakan sebagai simpul-simpul P_n atau pun simpul-simpul P_m. Oleh karena itu, untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak dua pada graf $P_m \rhd P_n$, maka untuk masing-masing nilai n akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul S hanya diambil dari simpul-simpul P_n, sedangkan kasus kedua jika S_2 diambil dari $V(P_m) \cup V(P_n)$ dengan ketentuan simpul S_2 diambil terlebih dahulu dari $V(P_n)$ sebanyak kelipatan 5, karena satu simpul elemen S_2 pada P_n dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Kemudian dilanjutkan pada simpul-simpul $V(P_n)$ yang terhubung atau memiliki jarak terkecil dengan $V(P_m)$ yang belum terdominasi.

a. $n \equiv 0 \pmod 5$)

Kasus 1 : $S_2 \in V(P_n)$

Menurut Umilasari dan Darmaji (2015) bahwa $\gamma_2(P_n) = \left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil$, karena $n \equiv 0 \pmod 5$) dan $n \in Z^+$ maka bilangan dominasi jarak dua pada setiap $P_{i,n}$ adalah $\gamma_2(P_n) = \left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil$ yang nilainya adalah $\gamma_2(P_n) = \left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \rhd P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq m(\gamma_2(P_m \rhd P_n)) = \frac{mn}{5}$.

Kasus 2 : $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 0 \pmod 5$), maka dari kasus pertama semua simpul sudah dapat didominasi dengan jarak maksimal dua.

Oleh karena itu, batas atas minimal yang diambil dari bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{mn}{5}$.

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah $\frac{mn}{5}$ merupakan bilangan dominasi yang minimum pada graf $P_m \rhd P_n$. Andaikan $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$. Karena setiap simpul elemen S_2 maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi jika $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$ adalah

$$5\left(\frac{mn}{5} - 1\right) = mn - 5 < mn$$

Dengan demikian, $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \nleq \frac{mn}{5} - 1$, karena terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga terbukti bahwa $\frac{mn}{5}$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal pada graf $P_m \rhd P_n$, maka $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{mn}{5}$

b. $n \equiv 1 \pmod 5$

Kasus 1 : $S \in V(P_n)$

Untuk setiap $P_{i,n}$ bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$, karena $n \equiv 1 \pmod 5$ dan $n \in Z^+$, maka $\gamma\left(P_n = \frac{n+4}{5}\right)$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \rhd P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq m\left(\gamma_2(P_n)\right) = \frac{m(n+4)}{5}$.

Kasus 2 : $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 1 \pmod 5$, maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-1}. Sebagaimana disebutkan dalam Umilasari dan Darmaji (2015) bahwa $\gamma_2(P_{n-1}) = \left\lceil \frac{n-1}{5} \right\rceil$. Karena $m \in Z^+$ dengan $m \equiv 1 \pmod 3$, maka $\gamma_2(P_{n-1}) = \frac{n-1}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-1} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $m\frac{(n-1)}{5}$. Sedangkan satu simpul pada P_n yang belum terdominasi yang juga merupakan simpul-simpul $V(P_m)$ memiliki bilangan dominasi $\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$.

Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$.

Dari kasus 1 dan 2 tersebut dapat dilihat bahwa $\frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil \leq \frac{m(n+4)}{5}$, sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$, yaitu $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$.

Andaikan $\frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $\left(\frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1\right)5$, karena $m \in Z^+$ dan $m \equiv 0 \pmod 5$, maka $\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil = \frac{m}{5}$. Sehingga

$$\left(\frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1\right)5 = \left(\frac{m(n-1)}{5} + \frac{m}{5} - 1\right)5$$
$$= mn - 5 < mn$$

Dengan demikian, simpul yang terdominasi kurang dari order pada graf $P_m \rhd P_n$, maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \nleq \frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil - 1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n-1)}{5} + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil$ adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal.

c. $n \equiv 2 \pmod 5$

Kasus 1: $S_2 \in V(P_m)$

Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$, karena $n \in Z^+$ dan $n \equiv 2 \pmod 5$, maka $\gamma_2(P_n) = \frac{n+3}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \rhd P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq m\left(\gamma_2(P_n)\right) = \frac{m(n+3)}{5}$.

Kasus 2: $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 2 \pmod 5$, maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-2}. Sebagaimana pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{n-2}) = \frac{n-2}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-2} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-2)}{5}$.

Sedangkan dua simpul pada setiap P_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan graf P_m yang masing-masing simpulnya terhubung dengan sebuah simpul. Setiap simpul yang belum terdominasi tersebut isomorfis dengan graf $P_m \odot G_1$, G_1 adalah trivial yang hanya memiliki satu simpul. Sehingga menurut Umilasari dan Darmaji (2015) $\gamma_2(P_m \odot G1=m3$. Dengan demikian bilangan dominasi pada graf $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Dua kemungkinan batas atas minimal bilangan dominasi jarak dua pada kasus 1 dan 2 menunjukkan $\frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil \leq \frac{m(n+3)}{5}$, sehingga diambil batas minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$, yaitu $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

Misalkan $\frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1$. Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah$\left(\frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right)5$.

$$\left(\frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 1\right)5$$
$$< \left(\frac{m(n-2)}{5} + \left(\frac{m}{3} + 1\right) - 1\right)5$$
$$= mn - 2m + \frac{5m}{3}$$

Karena $mn - 2m + \frac{5m}{3} < mn$, sehingga terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \rhd Pn \nleq mn-25+m3-1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil$.

d. $n \equiv 3 \pmod 5$

Kasus 1 : $S_2 \in V(P_n)$

Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil$, karena $n \equiv 3 \pmod 5$ dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_n) = \frac{n+2}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \rhd P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq m\big(\gamma_2(P_n)\big) = \frac{m(n+2)}{5}$.

Kasus 2 : $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 3 \pmod 5$, maka terlebih ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-3}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{n-3}) = \frac{n-3}{5}$. Sehingga untuk m buahP_{n-3} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-3)}{5}$. Sedangkan tiga simpul pada setiap P_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan m buah graf P_3 dengan salah satu simpul ujungnya terhubung dan membentuk Lintasan P_m. Karena jarak terjauh untuk setiap simpul P_m pada simpul P_n yang belum terdominasi sama dengan 2, maka setiap simpul P_m diambil sebagai elemen S2, sehingga kedua simpul P_n tersebut dapat didominasi. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m$.

Karena $\frac{m(n+2)}{5} = \frac{m(n-3)}{5} + m$, sehingga kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m$.

Selanjutnya, misalkan $\frac{m(n-3)}{5} + m$ bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m - 1$, karena setiap simpul dari $\frac{m(n-3)}{5}$ simpul dapat mendominasi maksimal 5 simpul dan setiap simpul dari m simpul dapat mendominasi 3 simpul. Maka jika diambil sebuah simpul dari $\frac{m(n-3)}{5}$ simpul bukan menjadi elemen S_2 pada P_n mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-3)}{5}-1\right)5+m\cdot 3=mn-5 < mn$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi, karena jumlah simpul maksimal yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada $P_m \rhd P_n$. Sehingga $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \nleq \frac{mn-3}{5}+m-1$ dan terbukti bahwa $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n-3)}{5}+m$ atau $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{mn+2}{5}$.

e. $n \equiv 4 \pmod 5$

Kasus 1 : $S_2 \in V(P_n)$

Untuk setiap $P_{i,n}$, bilangan dominasi jarak dua pada P_n adalah $\gamma_2(P_n) = \left\lceil\frac{n}{5}\right\rceil$, karena $n \equiv 4 \pmod 5$ dan $n \in Z^+$, maka $\gamma_2(P_n) = \frac{n+1}{5}$. Karena terdapat m buah P_n pada graf $P_m \rhd P_n$, maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \le m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+1)}{5}$.

Kasus 2 : $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$

Karena $n \equiv 4 \pmod 5$, maka pertama kali ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada P_{n-4}. Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka $\gamma_2(P_{n-4}) = \frac{n-4}{5}$. Sehingga untuk m buah P_{n-4} maka bilangan dominasi jarak duanya adalah $\frac{m(n-4)}{5}$. Sedangkan 4 simpul pada setiap P_n yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul $V(P_m)$. Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi terdiri dari m buah graf P_4 dengan salah satu simpul ujungnya terhubung membentuk Lintasan P_m, karena jarak terjauh untuk setiap simpul P_m pada simpul P_n yang belum terdominasi sama dengan 3, maka jika diambil simpul P_m sebagai elemen S_2 mengakibatkan banyaknya himpunan dominasi yang dibutuhkan untuk menjangkau simpul-simpul yang belum terdominasi tidak akan minimum, karena simpul yang dibutuhkan pasti lebih dari m simpul. Sehingga untuk kasus ini minimal diambil satu simpul untuk masing-masing P_4 dan bukan $v_{i,1}$ atau pun $v_{i,4}$, karena $d(v_{i,1}, v_{i,4}) = 3$. Dengan demikian dibutuhkan minimal m simpul dengan masing-masing simpul dapat mendominasi 4 simpul, yaitu $v_{i,2}$ atau $v_{i,3}$. Karena $i = 1, 2, \ldots, m$, maka bilangan dominasi jarak dua pada graf $P_m \rhd P_n$ adalah $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \le \frac{m(n-4)}{5}+m = \frac{m(n+1)}{5}$.

Kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga kita dapat mengambil batas atas bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ yaitu $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \le \frac{m(n-4)}{5}+m$.

Andaikan $\frac{m(n-4)}{5}+m$ bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Misalkan $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \le \frac{m(n-4)}{5}+m-1$, yaitu dengan mengambil sebarang satu simpul pada P_n sedemikian tidak lagi menjadi elemen S_2. Hal ini mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-4)}{5}-1\right)5+m\cdot 4=mn-5<mn$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(P_m \rhd P_n) \le \frac{m(n-4)}{5}+m-1$dan terbukti bahwa$\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n-4)}{5}+m$ atau$\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{m(n+1)}{5}$.

Masing-masing nilai n pada kelima pembuktian di atas menunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada $P_m \rhd P_n$ berbeda-beda. Untuk $n \equiv 0 \pmod 5$, $n \equiv 3 \pmod 5$, dan $n \equiv 4 \pmod 5$ dapat disimpulkan bahwa $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \mathrm{m}\left\lceil\frac{\mathrm{n}}{5}\right\rceil$. Untuk $n \equiv 1 \pmod 5$, $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \mathrm{m}\left\lfloor\frac{\mathrm{n}}{5}\right\rfloor + \left\lceil\frac{\mathrm{m}}{5}\right\rceil$, sedangkan untuk $n \equiv 2 \pmod 5$, $\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \frac{\mathrm{mn}}{5}+\frac{\mathrm{m}}{3}$.

◊ **Teorema 0.3** *Diberikan graf lingkaran C_n dan graf bintang S_m dengan masing-masing ordernya n dan m untuk $n,m \ge 3$.*

Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi comb $C_n \rhd S_m$ adalah $\gamma_2(C_n \rhd S_m) = n$.

Bukti. Graf $C_n \rhd S_m$ adalah graf yang diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul *pendant* dari masing-masing graf S_m kopian ke-*i* pada setiap simpul graf C_n. Maka $\lvert C_n \rhd S_m \rvert = n(m+1)$. Berdasarkan Observasi dalam Umilasari dan Darmaji (2015) diketahui bahwa $\gamma_2(S_m) = 1$. Karena terdapat *n* kopi graf S_m pada $C_n \rhd S_m$, maka maksimal terdapat *n* simpul elemen himpunan dominasi jarak dua. Sehingga dapat dituliskan bahwa $\lvert S_2 \rvert = \gamma 2(C_n \rhd S_m) \leq n$.

Andaikan $\gamma 2(C_n \rhd S_m) \leq n-1$, maka terdapat S_m kopian ke-*i* yang semua simpulnya bukan elemen himpunan dominasi jarak dua. Seperti yang diketahui bahwa graf Bintang S_m memiliki diameter sama dengan 2. Sehingga pastilah terdapat v_i elemen S_m sedemikian $d(v_i, S_2) > 2$. Oleh karena itu, $\lvert S_2 \rvert \nleq n-1$, sehingga *n* adalah bilangan dominasi jarak dua minimum pada graf $C_n \rhd S_m$. Dengan demikian terbukti bahwa $\lvert S_2 \rvert = \gamma_2(C_n \rhd S_m) = n$.

Untuk graf-graf yang lain seperti graf $P_m \rhd C_n$, $C_n \rhd P_m$ dan $C_n \rhd P_m$ pembuktian bilangan dominasi jarak satu dan dua analog dengan pembuktian pada Teorema 1 dan 2. Sedangkan bilangan dominasi jarak satu dan dua dari graf $P_m \rhd S_n$ dan $C_n \rhd S_m$, analog dengan Teorema 3. Oleh karena itu, secara umum nilai bilangan dominasi jarak satu dan dua dari semua graf yang diamati dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Dari kedua tabel tersebut dapat dilihat bahwa secara umum tidak dapat disimpulkan perbandingan antara bilangan dominasi jarak satu dengan bilangan dominasi jarak dua pada graf yang sama. Sebagai contoh, menurut Goddard dan Henning (2006) graf Lintasan P_m memiliki bilangan dominasi jarak satu yaitu $\gamma = \lceil \frac{m}{3} \rceil$, dalam Umilasari dan Darmaji (2015) diketahui bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan P_m adalah $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$.

Sedangkan graf Bintang seperti yang diketahui memiliki bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua yang sama yaitu $\gamma(S_n) = \gamma_2(S_n) = 1$. Begitu juga untuk graf hasil operasi, graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dengan graf Bintang memiliki bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua yang sama. Akan tetapi tidak berlaku untuk $P_m \rhd P_n$ dan $P_m \rhd C_n$ serta graf yang lainnya. Hal ini dikarenakan oleh beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

Tabel 1. Ringkasan Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Hasil Operasi *Comb*

Graf	Bilangan Dominasi Jarak Dua
$P_m \rhd P_n$	$\gamma(P_m \rhd P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } n \equiv 2 \pmod 3 \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$
$P_m \rhd C_n$	$\gamma(P_m \rhd C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } n \equiv 2 \pmod 3 \\ m\lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$
$P_m \rhd S_n$	$\gamma(P_m \rhd S_n) = m$
$C_n \rhd P_m$	$\gamma(C_n \rhd P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \pmod 3 \text{ dan } m \equiv 2 \pmod 3 \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$
$C_n \rhd C_m$	$\gamma(C_n \rhd C_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \pmod 3,\ m \equiv 2 \pmod 3 \\ n\lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod 3 \end{cases}$
$C_n \rhd S_m$	$\gamma(C_n \rhd S_m) = n$

Tabel 2. Ringkasan Bilangan Dominasi Jarak Dua pada graf Hasil Operasi *Comb*

Graf	Bilangan Dominasi Jarak Dua
$P_m \rhd P_n$	$\gamma_2(P_m \rhd P_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod 5,\ n \equiv 3 \pmod 5 \\ & n \equiv 4 \pmod 5 \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod 5 \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$
$P_m \rhd C_n$	$\gamma_2(P_m \rhd C_n) = \begin{cases} m\lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod 5,\ n \equiv 4 \pmod 5 \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod 5 \\ m\lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \pmod 5, n \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$
$P_m \rhd S_n$	$\gamma_2(P_m \rhd S_n) = m$
$C_n \rhd P_m$	$\gamma_2(C_n \rhd P_m) = \begin{cases} n\lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \pmod 5, m \equiv 3 \pmod 5, \\ & n \equiv 4 \pmod 5 \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod 5 \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \pmod 5 \end{cases}$
$C_n \rhd C_m$	$\gamma_2(C_n \rhd C_m) = \begin{cases} \frac{nm}{5} & \text{jika } m \equiv 0 \pmod 5,\ m \equiv 4 \pmod 5 \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod 5 \\ n\lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \pmod 5, m \equiv 3 \pmod 5 \end{cases}$
$C_n \rhd S_m$	$\gamma_2(C_n \rhd S_m) = n$

D. KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Bintang adalah $\gamma(P_m \rhd S_n) = \gamma_2(P_m \rhd S_n) = m$
2. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lingkaran dan Bintang adalah $\gamma(C_n \rhd S_m) = \gamma_2(C_n \rhd S_m) = n$
3. Bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Lingkaran antara lain:

a. $\gamma(P_m \rhd P_n) =$
$$\begin{cases} m\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 0\ (mod\ 3), \quad n \equiv 2(mod\ 3) \\ m\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

b. $\gamma(P_m \rhd C_n) =$
$$\begin{cases} m\left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 0\ (mod\ 3), \quad n \equiv 2(mod\ 3) \\ m\left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

c. $\gamma(C_n \rhd P_m) =$
$$\begin{cases} n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 0\ (mod\ 3), \quad n \equiv 2(mod\ 3) \\ n\left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

d. $\gamma(C_n \rhd C_m) =$
$$\begin{cases} n\left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 0\ (mod\ 3), \quad n \equiv 2(mod\ 3) \\ n\left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil; & jika n \equiv 1(mod\ 3) \end{cases}$$

4. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Lingkaran antara lain:

a. $\gamma_2(P_m \rhd P_n) =$
$$\begin{cases} m\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil & jika\ n \equiv 0(mod\ 5), \quad n \equiv 3(mod\ 5), n \equiv 4(mod\ 5) \\ m\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil & jika\ n \equiv 1(mod\ 5) \\ m\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & jika\ n \equiv 2(mod\ 5) \end{cases}$$

b. $\gamma_2(P_m \rhd C_n) =$
$$\begin{array}{ll} m\left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil & jika\ n \equiv 0(mod\ 5), \quad n \equiv 4(mod\ 5) \\ m\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil & jika\ n \equiv 1(mod\ 5) \\ m\left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil & jika\ n \equiv 2(mod\ 5), \quad n \equiv 3(mod\ 5) \end{array}$$

c. $\gamma_2(C_n \lhd P_m) =$
$$\begin{cases} n\left\lceil \frac{m}{5} \right\rceil & jika\ m \equiv 0(mod\ 5), \quad m \equiv 3(mod\ 5), m \equiv 4(mod\ 5) \\ n\left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil & jika\ m \equiv 1(mod\ 5) \\ n\left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & jika\ m \equiv 2(mod\ 5) \end{cases}$$

d. $\gamma_2(C_n \lhd C_m) =$
$$\begin{cases} \frac{nm}{5} & jika\ m \equiv 0(mod\ 5), \quad m \equiv 4(mod\ 5) \\ n\left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{5} \right\rceil & jika\ m \equiv 1(mod\ 5) \\ n\left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor + \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil & jika\ m \equiv 2(mod\ 5), \quad m \equiv 3(mod\ 5) \end{cases}$$

5. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* tidak memiliki relasi atau perbandingan secara umum. Hal ini dikarenakan oleh beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

Setelah dilakukan penelitian mengenai dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) pada beberapa Famili Graf Tangga, maka diberikan saran bagi pembaca yang berminat meneliti di bidang ini, yaitu nilai dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf khusus dan graf hasil operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G. dan Lesniak, L., (1996),*Graphs and Digraph*, 3rd edition, Chapman &Hall/CRC, 2-6 Boundaru Row, London SE1 8HN, UK.

Gross, J. dan Yellen J., (2006), *Graph Theory and Its Applications*, Chapman & Hall/CRC, FL 33487-2742 Boca Raton, London.

Haynes, W. Teresa. (1996), *Fundamental of Dominations in Graphs*, New York: MarcelDekker, Inc.

Klavˇzar, S. (1995), “Dominating Cartesian Product of Cycles”, *Discrete Applied Mathematics*, No.59, hal.129-136.

Saputro, S.W., Mardiana, N., dan Purwasi, I.A. (2013), “The Metric Dimension of *Comb*Product Graph’, *Graph Theory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday*.

Snyder, K. (2011), *c-’Dominating Sets for Families of Graphs*, University of Mary Washington.

Umilasari, R. dan Darmaji, (2015), *Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember