Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga

Ilham Saifudin[1)]

[1)]*Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember*

Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121

Email : [1)] ilham.saifudin@unmuhjember.com

ABSTRAK

Misal G sebuah graf terhubung dan $d(x,y)$ merupakan jarak antara titik x dan y dalam graf G. Untuk himpunan terurut yaitu $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vekto $r(v|W) = \left(d(v,w_1), d(v,w_2), d(v,w_3), \dots, d(v,w_k)\right)$. Jarak minimum v ke W adalah himpunan penyelesaian di G atau dapat disebut dimensi metrik $\dim(G)$. Sedangkan, untuk sebuah titik v dari graf G dan sebuah himpunan bagian S pada $V(G)$, jarak antara v dan S adalah $d(v,S) = \min d(v,x)|x \in S$.Untuk k-partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ merupakan representasi v keΠ didefinisikan sebagai k-vektor $r(v|\Pi) = \left(d(v,S_1), d(v,S_2), d(v,S_3), \dots, d(v,S_k)\right)$. Partisi Π disebut partisi pembeda, jika k-vektor $d(v|\Pi) = v \in V(G)$ adalah pembeda. Kardinalitas minimal dari partisi pembeda adalah dimensi partisi $pd(G)$. Pada artikel ini akan ditentukan nilai dari dimensi metrik dan dimensi partisi pada Famili Graf Tangga.

Kata kunci: Dimensi Metrik, Dimensi Partisi, Famili Graf Tangga

1. PENDAHULUAN

Graf adalah salah satu pokok bahasan Matematika Diskrit yang telah lama dikenalkan dan banyak diaplikasikan pada berbagai bidang. Dalam merepresentasikan visual dari suatu graf yaitu dengan menyatakan objek dengan simpul, noktah, bulatan, titik ataupun *vertex*. Sedangkan hubungan antara objek yang satu dengan lainnya dinyatakan dengan garis, sisi, atau *edge* (Harary, 1969). Secara umum, graf adalah pasangan himpunan (V,E) dimana V adalah himpunan tidak kosong dari titik dan E adalah himpunan tidak kosong atau yang menghubungkan sepasang titik pada suatu graf. Misalnya $V = v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ dan $E = e_1, e_2, e_3, \dots, e_n$ atau $E = (v_1, v_2), (v_2, v_3), (v_3, v_4), \dots, (v_{n-1}, v_n)$, dimana $e = (v_i, v_j)$ yang artinya sisi yang menghubungkan titik v_i dan v_j (Munir, 2010).

Salah satu topik yang menarik pada teori graf adalah dimensi metrik dan dimensi partisi. Dimensi metrik dan dimensi partisi sudah ada sejak tahun 1976 dengan jurnal yang berjudul *On Metric Dimension of The Graph* (Harary, et al, 1976). Selain itu, juga banyak diteliti diantaranya tentang dimensi partisi pada Graf Roda W_n oleh Tomescu, I Javaid, dan Slamin (Tomescu, et al, 2007). Contoh aplikasi yang menggunakan dimensi metrik dan dimensi partisi yaitu navigasi robot, dimana sebuah robot bergerak dari satu titik lokasi ke titik lainnya pada bidang dengan meminimalkan kesalahan yang terjadi dalam menerjemahkan petunjuk (kode) yang didapatkan dari titik-titik lokasi tersebut. Untuk itu, setiap titik lokasi pada bidang gerak robot harus memberikan kode yang berbeda dan unik. Jika titik lokasi dipandang sebagai titik dan lintasan robot dipandang sebagai sebuah sisi, maka pada bidang gerak robot dapat direpresentasikan sebagai graf. Agar robot dapat bergerak secara efisien, maka robot harus cepat menerjemahkan kode titik-titik lokasi yang dilaluinya. Untuk itu, titik lokasi harus mempunyai komponen yang seminimal mungkin. Jika komponen kode titik lokasi menggunakan pengertian jarak, maka masalah ini disebut dimensi metrik (Khuller, et al, 1996).

Dalam artikel ini, akan membahas nilai dimensi metrik dan dimensi partisi beberapa Famili Graf Tangga. Graf yang digunakan diantaranya: Graf Tangga L_n, Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n, dan Graf Tangga Permata Dl_n. Beberapa keterangan di atas yang melatar belakangi peneliti untuk melakukan penelitian dengan judul Dimensi Metrik dan Dimensi Partisi dari Famili Graf Tangga.

2. TINJAUAN PUSTAKA

2.1 Dimensi Metrik

Definisi jarak pada graf (Chartand, et al, 2000), dimana untuk titik u dan v di graf terhubung G, jarak $d(u,v)$ adalah panjang lintasan terpendek antara u dan v di G. Untuk himpunan terurut $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ dari himpunan titik di graf terhubung G dan sebuah titik v di G, k-vektor

$r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), d(v,w_3), \dots, d(v,w_k))$

, dimana koordinat metrik dari v terhadap W. Himpunan W disebut himpunan pembeda untuk G memiliki koordinat metrik yang berbeda. Sehingga minimum kardinalitas dari himpunan pembeda atau basis dari G disebut dimensi metrik atau dapat dinotasikan $dim\,(G)$.

2.2 Dimensi Partisi

Pada dimensi partisi dapat diilustrasikan sebagai berikut. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dengan $V(G)$ adalah himpunan titik-titiknya, S adalah himpunan bagian dari $V(G)$ dan v titik di G, jarak antara v dan S dinotasikan $d(v,S)$ didefinisikan sebagai $d(v,S) = \min\{d(v,x) | x \in S\}$. Misalkan terdapat sebuah graf terhubung G dan k-buah partisi $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_k\}$ dari $V(G)$ dan v di titik G. Koordinat v terhadap Π didefinisikan sebagai

$r(v|\Pi) = ((v,S_1),(v,S_2),\dots,(v,S_k))$.

Partisi Π dinyatakan partisi pembeda, jika k-vektor $(r|\Pi)$ untuk setiap $v \in V(G)$ berbeda. Nilai minimum k agar terdapat partisi pembeda dari $V(G)$ adalah dimensi partisi dari G atau dapat dinotasikan $pd(G)$.

Pada dimensi partisi dan dimensi metrik memiliki keterkaitan. Keterkaitan tersebut dapat dilihat pada teorema berikut :

Teorema 2.1 *(Chartrand, et al, 2000) Jika G adalah graf terhubung tidak trivial maka $pd(G) \le dim(G) + 1$.*

Bukti. Misalkan $dim(G) = k$ dan misal $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_k\}$ adalah basis dari G. Anggap partisi terurut $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{k+1}\}$ dari himpunan titik $V(G)$, dimana $S_i = \{w_i\}, (1 \le i \le k)$ dan $S_{k+1} = V(G) - W$. Oleh karena itu

$r(v|W) = (d(v,w_1), d(v,w_2), d(v,w_3), \dots, d(v,w_k), 0)$

untuk $v \in V(G) - W$ dan W adalah himpunan penyelesaian dari G. Hal ini mengakibatkan koordinat $r(v|\Pi)$, untuk $v \in S_{k+1}$ berbeda. Lebih lanjut, hanya koordinat $r(w_i|\Pi)$ untuk $1 \le i \le k$, memiliki elemen ke-i sama dengan 0, yang mengakibatkan $r(v|\Pi) \ne r(w_i|\Pi)$ untuk semua $v \in V(G) - W$ dan semua i dengan $1 \le i \le k$. Jadi, Π adalah penyelesaian partisi $k+1$ dari G dan $pd(G) \le dim(G) + 1$.

Beberapa hasil penelitian terkait dimensi metrik dan dimensi partisi yang diterbitkan mulai tahun 2012, dapat dilihat pada rangkuman tabel 1.

Tabel 1. Hasil Penelitian (dim) dan (pd)

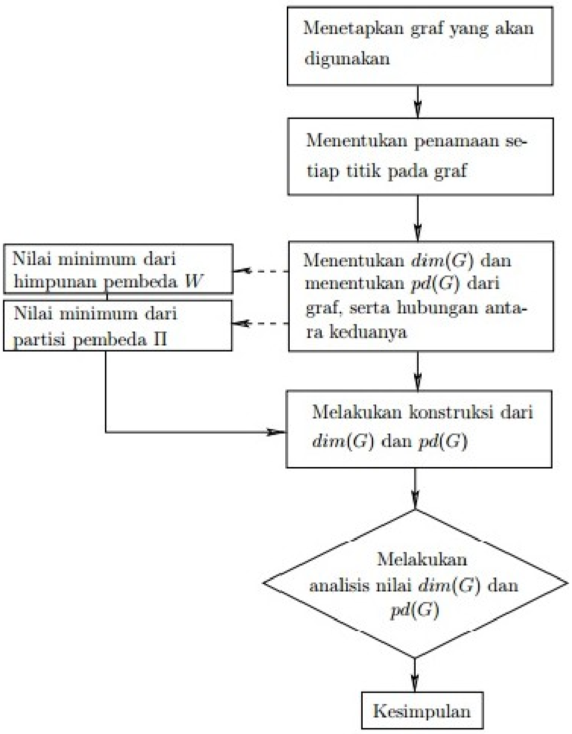
Graf	Hasil	Ket.
(Graf Gir); $n \geq 2$	$pd(G_{2n}) = k$	Riza, et al, 2012
(Graf Gir+anting G'_{2n}); $n \geq 2$	$pd(G'_{2n}) = 3; 2 \leq n \leq 4$ $pd(G'_{2n}) = k; n \geq 4$	Darmaji, et al, 2012
(Graf Korona $C_m \odot K_n$); $m \geq 3, n \geq 1$	$pd(C_m \odot K_n) = 3; n = 1$ $pd(C_m \odot K_n) = p; n \geq 1$	Yogi, et al, 2012
(Graf Sikel C_n); $n \geq 3$	$dim(C_n) = 2; n \geq 3$	Septiani, et al, 2012
(Graf Bipartit Komplit $K_{m,n}$)	$dim(K_{m,n}) = n - 2; n \geq$	Septiani, et al, 2012
(Graf Kipas F_n)	$pd(F_n) = 3; 4 \leq n \leq 8$ $pd(F_n) = 4; 9 \leq n \leq 13$	Novians yah, et al,2012
(Graf Kincir $[K_i]n$); $n \geq 2$	$pd([K_i]n) = \left\lceil \frac{1}{2}(1 + \sqrt{8n+1}) \right\rceil$	Novians yah, et al,2012

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah metode pendeteksian pola *(pattern recognition)* dan deduktif aksiomatik. Metode pendekteksian pola yaitu mencari pola untuk dilakukan konstruksi himpunan pembeda pada dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) sedemikian hingga nilai koordinat minimum dan berbeda. Sedangkan, deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dan logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan suatu masalah. Kemudian metode tersebut diterapkan dalam dimensi metrik dan dimensi partisi pada beberapa Famili Graf Tangga diantaranya : Graf Tangga L_n, Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n, dan Graf Tangga Permata Dl_n.

Di bawah ini akan dijelaskan uraian rancangan penelitian beserta alur penelitian yang digunakan dalam penelitian, berikut uraiannya:

1. Menetapkan graf yang akan digunakan untuk dianalisa dimensi metrik dan dimensi partisinya.
2. Menentukan penamaan setiap titik sedemikian hingga titiknya berbeda dan menghasilkan formulasi yang memetakan himpunan titik.
3. Menentukan dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.
4. Melakukan konstruksi terhadap titik koordinat dari dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.
5. Melakukan analisis dari nilai dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.
6. Melakukan penyimpulan dari analisis nilai dimensi metrik $dim(G)$ dan dimensi partisinya $pd(G)$ pada Famili Graf Tangga.



Gambar 1. Alur Penelitian

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam Penelitian ini diperoleh beberapa teorema dimensi metrik dan dimensi partisi dari beberapa Famili Graf Tangga, meliputi:

4.1 Graf Tangga

Graf Tangga dilambangkan dengan adalah graf sederhana tak berarah dan didefinisikan sebagai produk kartesian dari dan . Ketika dibentuk akan terlihat seperti tangga dengan anak tangga. Graf Tangga memiliki

$_n) = \{x_i; 1 \le i \le n; n \le 2\} \cup \{y_i; 1 \le i \le n; n \le 2\}$

,

$_n) = \{x_i y_i; 1 \le i \le n; n \le 2\} \cup \{x_i x_{i+1}; 1 \le i \le n; n \le 1\} \cup \{y_i y_{i+1}; 1 \le i \le n; n \le 1\}$

,: $|V| = 2n$ dan : $|E| = n + 2(n-1)$.

Sebelum disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga L_n, disajikan terlebih dahulu Teorema dimensi metrik dari Graf Tangga L_n sebagai berikut.

Teorema 0.1 *Untuk setiap bilangan bulat $n \ge 2$, nilai dimensi metrik Graf Tangga L_n adalah$dim(L_n) = 2$.*

Bukti. Untuk $n \ge 2$, akan dibuktikan bahwa $dim\,(L_n) \ge 2$. Jika kardinalitas $dim(L_n) = 1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, maka sedikitnya ada 2 titik yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(L_n) \ge 2$.

Untuk mengetahui $dim\,(L_n) \le 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2\}$, dimana $w_1 = x_1$, $w_2 = y_1$ atau dapat ditulis $W = \{x_1, y_1\}$, maka diperoleh representasi titik $V(L_n)$ terhadap W:

$r(x_i|W) = (i-1, i)$ untuk $1 \le i \le n$;

$r(y_i|W) = (i, i-1)$ untuk $1 \le i \le n$.

Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(L_n)$ memiliki koordinat berbeda terhadap W dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim(L_n) \le 2$. Oleh karena $dim\,(L_n) \ge 2$ dan $dim\,(L_n) \le 2$, maka $dim(L_n) = 2$.

Selanjutnya akan disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga L_n.

Teorema 0.2 *Untuk setiap bilangan bulat $n \ge 2$, nilai dimensi partisi Graf Tangga L_n adalah $pd\,(L_n) = 3$.*

Bukti. Untuk $n \ge 2$, akan ditunjukkan $pd\,(L_n) \ge 3$. Jika kardinalitas $pd\,(L_n) = 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 3 partisi yang merupakan partisi pembeda , sehingga $pd\,(L_n) \ge 3$.

Untuk mengetahui $pd\,(L_n) \le 3$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(L_n) = 2$ dan $W = \{x_1, y_1\}$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$

$$S_k = \begin{cases} \{x_1\}; & untuk\ k = 1 \\ \{y_1\}; & untuk\ k = 2 \\ \{x_i, y_i | 2 \le i \le n\}; & untuk\ k = 3 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $|S_3| = 2n - 2 < |V| = 2n$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(L_n)$ terhadap Π :

$r(x_1|\Pi) = (0,1,1)$,

$r(y_1|\Pi) = (1,0,1)$,

$r(x_i|\Pi) = (i-1, i, 0)$ untuk $2 \le i \le n$,

$r(y_i|\Pi) = (i, i-1, 0)$ untuk $2 \le i \le n$.

Dapat dilihat bahwa setiap titik $V(L_n)$ memiliki koordinat yang berbeda terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd\,(L_n) \le dim(L_n) + 1 = 3$, sehingga $pd\,(L_n) \le 3$. Oleh Karena $pd\,(L_n) \ge 3$ dan $pd \le 3$, dengan demikian $pd\,(L_n) = 3$.

4.2 Graf Tangga Tiga-siklus L_n

Graf Tangga Tiga-siklus adalah salah satu famili dari Graf Tangga. Graf Tangga

Tiga-siklus dilambangkan dengan TCL_n, dimana memiliki $V(TCL_n) = \{x_i, y_j, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq n+1\}$, $E(TCL_n) = \{y_j z_j; 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{y_j y_{j+1}; 1 \leq j \leq n\} \cup \{x_i y_i, x_i z_i, x_i y_{i+1}, x_i z_{i+1}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V| = 3n+2$, dan $q = |E| = 6n+1$.

Sebelum disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf tangga Tiga-siklus TCL_n, disajikan terlebih dahulu Teorema dimensi metrik dari Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n.

Teorema 0.3 *Nilai dimensi metrik Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n adalah*

$$dim(TCL_n) = \begin{cases} 2; & untuk \quad 1 \leq n \leq 2 \\ n; & untuk \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Untuk $1 \leq n \leq 2$, akan ditunjukkan bahwa $dim\,(TCL_n) \geq 2$. Misalnya, jika kardinalitas $dim\,(TCL_n) = 1$, maka pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 2 titik yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim\,(TCL_n) \geq 2$. Sedangkan untuk mengetahui $dim\,(TCL_n) \leq 2$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya diambil himpunan $W = \{z_1, z_2\}$, maka diperoleh representasi titik $V(TCL_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan juga memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim\,(TCL_n) \leq 2$. Oleh karena $dim\,(TCL_n) \geq 2$ dan $dim\,(TCL_n) \leq 2$, maka $dim(TCL_n) = 2$.

Untuk $n \geq 3$, akan ditunjukkan bahwa $dim\,(TCL_n) \geq n$. Misalnya, jika kardinalitas $dim(TCL_n) = n-1$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada n titik yang merupakan himpunan pembeda. Sehingga, $dim\,(TCL_n) \geq n$. Sedangkan untuk mengetahui $dim\,(TCL_n) \leq n$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{x_i\}; 1 \leq i \leq n$ dan $|W| = n$, maka diperoleh representasi titik $V(TCL_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga, $dim\,(TCL_n) \leq n$. Oleh karena $dim\,(TCL_n) \geq n$ dan $dim\,(TCL_n) \leq n$, maka $dim(TCL_n) = n$.

Selanjutnya akan disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga Tiga-siklus.

Teorema 0.4 *Nilai dimensi partisi Graf Tangga Tiga-siklusTCL_n adalah*

$$pd\,(TCL_n) = \begin{cases} 3; & untuk \quad 1 \leq n \leq 2 \\ n+1; & untuk \quad n \geq 3 \end{cases}$$

Bukti. Untuk $1 \leq n \leq 2$, akan ditunjukkan bahwa $pd\,(TCL_n) \geq 3$. Misalnya, jika kardinalitas $pd\,(TCL_n) = 2$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada 3 partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd\,(TCL_n) \geq 3$. Sedangkan, untuk mengetahui $pd\,(TCL_n) \leq 3$, maka dilakukan sebuah konstruksi. Misalnya $dim(TCL_n) = 2$. Kemudian, untuk $n = 1$, anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3\}$, sedemikian hingga: $S_1 = \{z_1\}$, $S_2 = \{z_2\}$, dan $S_3 = \{x_1, y_1, y_2\}$ dan untuk $n = 2$ sedemikian hingga: $S_1 = \{z_1\}$, $S_2 = \{z_2\}$, dan $S_3 = \{x_1, x_2, y_1, y_2, y_3, z_3\}$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(TCL_n)$ terhadap Π dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd\,(TCL_n) \leq dim(TCL_n) + 1 = 3$, sehingga $pd\,(TCL_n) \leq 3$. Oleh karena, $pd\,(TCL_n) \geq 3$ dan $pd\,(TCL_n) \leq 3$, dengan demikian $pd\,(TCL_n) = 3$.

Untuk $n \geq 3$, akan ditunjukkan bahwa $pd\,(TCL_n) \geq n+1$. Jika kardinalitas $pd\,(TCL_n) = n$, maka pasti bukan partisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $n+1$ partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(TCL_n) \geq n+1$.

Sedangkan untuk mengetahui $pd(TCL_n) \leq n+1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(TCL_n) = n$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{n+1}\}$, sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n\}; & untuk\ 1 \leq k \leq n \\ \{y_i, z_i \mid 1 \leq i \leq n+1\}; & untuk\ k = n+1 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $|S_n| =$ dan $|S_{n+1}| = 2n +$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(TCL$ terhadap dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(TCL_n) \leq \dim(TCL_n) + 1 = n +$, maka $pd(TCL_n) \leq n +$. Oleh karena, $pd(TCL_n) \geq n +$ dan $pd(TCL_n) \leq n +$, dengan demikian $pd(TCL_n) = n +$.

4.3 Graf Tangga Permata

Graf Tangga Permata adalah juga salah satu Famili Graf Tangga. Graf Tangga Permata dilambangkan Dl_n memiliki $V(Dl_n) = \{x_i, y_i, z_j; 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq 2n\}$, dan $E(Dl_n) = \{x_i x_{i+1}, y_i y_{i+1}; 1 \leq i \leq n-1\} \cup \{x_i y_i; 1 \leq i \leq n\} \cup \{z_j z_{j+1}$ $; 1 \leq j \leq 2n-2, genap\} \cup \{x_i z_{2i-1}, x_i z_{2i}, y_i z_{2i-1}, y_i z_{2i}; 1 \leq i \leq n\}$, $p = |V| = 4n$ dan $q = |E| = 8n-3$. Sebelum disajikan Teorema dimensi partisi, terlebih dahulu disajikan Teorema dimensi metrik dari Graf Tangga Permata Dl_n sebagai berikut.

Teorema 0.5 *Setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi metrik Graf Tangga Permata adalah $dim(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$.*

Bukti. Untuk $n \geq 2$, akan ditunjukkan bahwa $dim(Dl_n) \geq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$. Jika Kardinalitas $dim(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 3$, maka pasti bukan himpunan pembeda dan pasti akan ditemukan sedikitnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$ titik yang merupakan himpunan pembeda, sehingga $dim(Dl_n) \geq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$.

Sedangkan untuk mengetahui $dim(Dl_n) \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$, maka dilakukan konstruksi, misalnya diambil himpunan pembeda $W = \{w_1, w_2, w_3, \dots, w_{\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2}\}$, sedemikian hingga:

$$w_k = \begin{cases} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n, i\ genap\}; & untuk \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \{z_i \mid 1 \leq i \leq n, i\ ganjil\}; & untuk \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq k \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2 \end{cases}$$

dan jumlah titik $|W| = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$, maka diperoleh representasi titik $V(Dl_n)$ terhadap W memiliki koordinat berbeda dan memiliki kardinalitas minimal, sehingga $dim\ (Dl_n) \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$. Oleh karena, $dim\ (Dl_n) \geq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$ dan $dim\ (Dl_n) \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$, maka $dim(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$.

Selanjutnya, akan disajikan Teorema dimensi partisi dari Graf Tangga Permata Dl_n.

Teorema 0.6 *Untuk setiap bilangan bulat $n \geq 2$, nilai dimensi partisi Graf Tangga Permata Dl_n adalah $pd(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1$.*

Bukti. Untuk $n \geq 2$, akan ditunjukkan bahwa $pd(Dl_n) \geq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1$. Jika kardinalitas $pd(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$, maka pasti bukan pastisi pembeda dan pasti akan ditemukan sedikintnya dua titik dengan representasi yang sama. Untuk itu, sedikitnya ada $\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1$ partisi yang merupakan partisi pembeda, sehingga $pd(Dl_n) \geq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1$.

Untuk mengetahui $pd(Dl_n) \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1$, maka dilakukan sebuah konstruksi, misalnya $dim(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$. Kemudian anggap partisi pembeda $\Pi = \{S_1, S_2, S_3, \dots, S_{\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1}\}$, sedemikian hingga:

$$S_k = \begin{cases} \{x_i \mid 1 \leq i \leq n, i \text{ genap}\}; & untuk \quad 1 \leq k \leq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \\ \{z_i \mid 1 \leq i \leq n, i \text{ ganjil}\}; & untuk \quad \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + 1 \leq k \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2 \\ \{x_{i ganjil}, y_i, z_{i genap} \mid 1 \leq i \leq n\}; & untuk \quad k = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1 \end{cases}$$

dimana jumlah titik $|S| = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$ dan $\left|S_{\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1}\right| = \left\lceil 5\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$ diperoleh representasi yang berbeda pada setiap himpunan titik $V(D$ terhadap dan memiliki kardinalitas minimal, karena berdasarkan Teorema 2.1 dinyatakan bahwa $pd(Dl_n) \leq dim(Dl_n) + 1 = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$, sehingga $pd(Dl_n) \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$. Oleh Karena, $pd(Dl_n) \geq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$ dan $pd(Dl_n) \leq \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$, dengan demikian $pd(Dl_n) = \left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil -$.

5 KESIMPULAN DAN SARAN

Berdasarkan penelitian di atas dapat disimpulkan bahwa nilai dimensi metrik dan dimensi partisi dari beberapa Famili Graf Tangga sebagai berikut :

1. Nilai dimensi metrik (dim) dari Famili Graf Tangga diantaranya:
   a. Dimensi metrik Graf Tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 2.
   b. Dimensi metrik Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n :
   $$dim(TCL_n) = \begin{cases} 2; & untuk \quad 1 \leq n \leq 2 \\ n; & untuk \quad n \geq 3 \end{cases}$$
   c. Dimensi metrik Graf Tangga Permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 2$.
2. Nilai dimensi partisi (pd) dari Famili Graf Tangga diantaranya:
   a. Dimensi partisi Graf Tangga L_n dengan $n \geq 2$ adalah 3.
   b. Dimensi partisi Graf Tangga Tiga-siklus TCL_n adalah
   $$pd(TCL_n) = \begin{cases} 3; & untuk \quad 1 \leq n \leq 2 \\ n+1; & untuk \quad n \geq 3 \end{cases}$$
   c. Dimensi partisi Graf Tangga Permata Dl_n dengan $n \geq 2$ adalah $\left\lceil 3\left(\frac{n+1}{2}\right)\right\rceil - 1$.

Setelah dilakukan penelitian mengenai dimensi metrik (dim) dan dimensi partisi (pd) pada beberapa Famili Graf Tangga, maka diberikan saran bagi pembaca yang berminat meneliti di bidang ini, yaitu nilai dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf khusus dan graf hasil operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Chartrand, G., Salehi, E., dan Zhang, P. 2000. *The Partition Dimension Of a Graph*. *Aequation Math.* Vol. 59, pp. 45-54

Darmaji. 2011. *Dimensi Partisi Graf Multipartit dan Graf Hasil Korona Dua Graf Terhubung.* Disertasi: Tidak dipublikasi. Jurusan Matematika: ITB

F. Harary, dan R. A. Melter. 1976. *On The Metric Dimension Of a Graph*. *Ars Combin.* Vol. 2, pp. 191-195

Harary, F. 1969. *Graph Theory.* wesley Publishing Company, Inc

Munir, R. 2010. *Matematika Diskrit.* Informatika Bandung: ITB

R. Amalia, dan Darmaji. 2012. *Dimensi Partisi pada Graf Serupa Roda dengan Penambahan Anting*. *Jurnal: Teknik ITS.* No. 1, Vol: 1

R. Riza. 2012. *Dimensi Partisi pada Graf Gir*. *Jurnal: FMIPA UNAND.* No. 12, Vol: 1

Septiana, E, dan Budi, R. 2012. *Dimensi Metrik pada Graf Lintasan, Graf Komplit, Graf Sikel, Graf Bintang, dan Graf Bipartit Komplit*. *Jurnal: Universitas Negeri surabaya.* No. 1. Vol: 1

S. Khuller, dab B, Rahavachari, A. 1996. *Resenfelt, Landmark in Graph, Discret*. *Appl. Math.* Vol. 70, pp. 217-229

Tomescu, I., javaid, I., dan Slamin. 2007. *On The Partition Dimension and Connected Partition Of Wheels*. *Ars Combin.* Vol. 84, pp. 311-317