Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf Hasil Operasi Shackle

Reni Umilasari[1)]

[1)] *Program Studi Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember*
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email: [1)]reni.umilasari@unmuhjember.ac.id

ABSTRAK

Himpunan dominasi S pada graf terhubung $G = (V, E)$ adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum diantara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$. Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua S_2. Graf shackle dinotasikan dengan $\mathrm{Shack}(G1, G2, \cdots, Gk)$ merupakan suatu graf shackle yang dibentuk dari k salinan graf G dinotasikan dengan $\mathrm{Shack}(G, k)$ dengan$k \geq 2$ dan k adalah bilangan asli. Operasi shackle pada penelitian ini terdiri dari shackle titik dan shackle sisi. Operasi shackle titik dinotasikan dengan $\mathrm{Shack}(G, v, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan v sebagai lingkage vertex. Sedangkan operasi shackle sisi dinotasikan dengan $\mathrm{Shack}(G, e, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan e sebagai lingkage edge. Dalam penelitian ini diperoleh bilangan dominasi jarak dua pada graf komplit dengan operasi shackle titik dan sisi adalah $\gamma_2(\mathrm{Shack}(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, \text{jika } s \geq 2, n \geq 3$ dan $\gamma_2(\mathrm{Shack}(K_n, e_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil, \text{jika } s \geq 2, n = 3{,}4 \text{ dan } \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, \text{jika } s \geq 2, n \geq 5$. Bilangan dominasi jarak dua pada graf bintang dengan operasi shackle adalah $\gamma_2(\mathrm{Shack}(S_n, v_i, t)) = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil, \text{jika } t \geq 2, n \geq 3, \gamma_2(\mathrm{Shack}(S_n, e_i, t)) = \left\lceil \frac{t}{2} \right\rceil \text{ jika } t \geq 2, n \geq 3$. Sedangkan graf komplit berpendant mempunyai bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2\left(\mathrm{Shack}\left(K_{n,n}, v_i, m\right)\right) = \gamma_2\left(\mathrm{Shack}\left(K_{n,n}, e_i, m\right)\right) = t, \text{untuk } m \geq 2, n \geq 3.$

Kata kunci : Bilangan Dominasi Jarak Dua , Operasi Shackle, Graf Komplit, Graf Bintang, Graf Komplit Berpendant

1. PENDAHULUAN

Dominating atau dominasi secara matematis dikenalkan pada awal tahun1960. Sejak saat itu baik himpunan dominasi maupun bilangan dominasi banyak digunakan dalam berbagai aplikasi. Salah satu contoh aplikasi dari bilangan dominasi adalah menentukan banyaknya pos pertolongan pertama pada suatu wilayah yang terjadi bencana alam. Misalkan wilayah tersebut terdiri dari banyak desa-desa kecil. Simpul dari graf mewakili desa-desa di wilayah tersebut. Sisi yang menghubungkan dua simpul menunjukkan bahwa pos pertolongan pertama darurat didirikan pada salah satu desa yang juga dapat melayani desa lainnya. Kemudian, himpunan dominasi minimum dari graf akan merepresentasikan cara melayani seluruh wilayah dengan jumlah pos pertolongan pertama yang minimum (Gross, J. dan Yellen J., 2006). Permasalahannya adalah jika jumlah tenaga medis serta fasilitas yang ada sangat terbatas maka banyaknya pos darurat yang akan didirikan harus diminimalkan, akan tetapi pelayanan kepada seluruh wilayah masih dapat dijangkau dengan baik. Misalkan, satu pos dapat melayani maksimal dua desa terdekat. Sehingga banyaknya pos dadurat yang didirikan lebih minimal dan banyaknya desa yang dapat dijangkau semakin bertambah. Permasalahan tersebut belum banyak dipublikasikan. Penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua yang sudah dilakukan diantaranya oleh Umilasari, R. (Umilasari, 2015) dan Vikade,W (Vikade, 2016).

Himpunan dominasi S pada graf $G = (V, E)$ adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S. Kardinalitas minimum diantara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi dari graf G dan dinotasikan $\gamma(G)$ (Haynes, W. Teresa., 1998). Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan S_2, yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal dua terhadap S_2. Bilangan dominasi jarak dua $\gamma_2(G)$ adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua S_2. Graf *shackle* dinotasikan dengan $Shack(G1, G2,\cdots, Gk)$, suatu graf *shackle* yang dibentuk dari k salinan graf G dinotasikan dengan $Shack(G, k)$ dengan$k \geq 2$ dan k adalah bilangan asli (Maryati et al, 2010). Operasi *shackle* pada penelitian ini terdiri dari *shackle* titik dan *shackle* sisi. Operasi *shackle* titik dinotasikan dengan $Shack(G, v, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan v sebagai *lingkage vertex*. Sedangkan operasi *shackle* sisi dinotasikan dengan $Shack(G, e, t)$ artinya graf dikonstruksi dari sebarang graf G sebanyak t salinan dan e sebagai *lingkage edge*. Graf yang akan digunakan dalam penelitian ini diantaranya graf lengkap (K_n), graf bintang (S_n) dan graf komplit *berpendant* $(K_{n,n})$.

2. METODE

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Adapun langkah-langkahnya sebagai berikut :

1) Memilih beberapa graf hasil operasi;
2) Menentukan *dominating set* pada graf hasil operasi;
3) Memilih simpul berderajat maksimal sebagai simpul pendominasi jarak dua;
4) Memilih simpul berderajat maksimal berikutnya yang belum terdominasi;
5) Menentukan himpunan dominasi jarak dua;
6) Menentukan bilangan kardinalitas jarak dua;
7) Membuat kesimpulan.

3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Berikut ini ditunjukkan beberapa teorema Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit, graf Bintang, dan graf Komplit Berpendant. Ketiga graf tersebut dioperasikan menggunakan operasi *Shackle* titik dan *Shackle* sisi.

Teorema 1. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit $\boldsymbol{K_n}$ sebanyak *s* salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\boldsymbol{\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, untuk\ s \geq 2, n \geq 3}$$

Bukti. $\boldsymbol{Shack(K_n, v_i, s)}$ adalah graf hasil operasi *shackle* titik dari graf Komplit $\boldsymbol{K_n}$ sebanyak $\boldsymbol{s}$ salinan dan $\boldsymbol{v}$ sebagai $\boldsymbol{lingkage\ vertex}$. Jika sebuah graf $\boldsymbol{K_n}$ memiliki $\boldsymbol{n}$ simpul, maka $\boldsymbol{Shack(K_n, v_i, s)}$ memiliki $\boldsymbol{ns - s + 1}$ simpul.

Graf K_n yang berdiameter satu dan jika dioperasikan *shackle* titik maka sebuah simpul pendominasi dapat mendominasi maksimal 4 salinan graf K_n, sehingga jumlah simpul pendominasi yang dibutuhkan adalah $\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ adalah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada $Shack(K_n, v_i, s)$ dengan $diam(K_n) = 1$. Andai $\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$, maka salinan maksimal yang dapat didominasi sampai jarak dua adalah

$$4s\left(\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1\right) \leq 4s\left(\frac{s + 4s - 1}{4s} - 1\right) = s - 1$$

dengan demikian jumlah salinan maksimal yang dapat didominasi adalah $s - 1$. Dengan kata lain, terdapat minimal satu salinan graf yang tidak didominasi, sehingga $\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) \neq \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$ dan $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang mendominasi seluruh simpul $Shack(K_n, v_i, s)$. Terbukti bahwa $\gamma_2(Shack(K_n, v_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$.

Teorema 2. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit K_n sebanyak *s* salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(Shack(K_n, e_i, s)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil, untuk\ s \geq 2, n = 3, 4 \\ \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, untuk\ s \geq 2, n \geq 5 \end{cases}$$

Bukti. Graf Komplit K_n adalah graf dengan diameter sama dengan satu, sehingga untuk setiap dua salinan graf K_n yang dioperasikan $Shackle$ sisi maka diameternya menjadi sama dengan dua. Oleh karena itu, untuk setiap empat salinan graf K_n dibutuhkan 1 simpul pendominasi, sehingga untuk s salinan graf $K_n Shack(K_n, e_i, s)$ dibutuhkan $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ simpul pendominasi.

Misalnya $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ bukan jumlah simpul pendominasi yang minimal. Ambil $\gamma_2(Shack(K_n, e_i, s)) = \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$ sebagai simpul pendominasi yang minimal. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$4s\left(\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1\right) \leq 4s\left(\frac{s + 4s - 1}{4s} - 1\right) = s - 1$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi hanya $s - 1$ salinan, maka dapat dikatakan bahwa terdapat satu salinan simpul-simpul graf $Shack(K_n, e_i, s)$ tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(shack(K_n, e_i, s)) \neq \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil - 1$. Oleh karena itu, $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ adalah simpul pendominasi yang minimal.

Teorema 2. Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit K_n sebanyak *s* salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\gamma_2(Shack(K_n, e_i, s)) = \begin{cases} \left\lceil \frac{s}{5} \right\rceil, untuk\ s \geq 2, n = 3, 4 \\ \left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil, untuk\ s \geq 2, n \geq 5 \end{cases}$$

Bukti. Graf Komplit K_n adalah graf dengan diameter sama dengan satu, sehingga untuk setiap dua salinan graf K_n yang dioperasikan $Shackle$ sisi maka diameternya menjadi sama dengan dua. Oleh karena itu, untuk setiap empat salinan graf K_n dibutuhkan 1 simpul pendominasi, sehingga untuk s salinan graf $K_n Shack(K_n, e_i, s)$ dibutuhkan $\left\lceil \frac{s}{4} \right\rceil$ simpul pendominasi.

Misalnya $\left\lceil\frac{s}{4}\right\rceil$ bukan jumlah simpul pendominasi yang minimal. Ambil $\gamma_2(Shack(K_n, e_i, s)) = \left\lceil\frac{s}{4}\right\rceil - 1$ sebagai simpul pendominasi yang minimal. Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$4s\left(\left\lceil\frac{s}{4}\right\rceil - 1\right) \leq 4s\left(\frac{s+4s-1}{4s} - 1\right) = s - 1$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi hanya $s-1$ salinan, maka dapat dikatakan bahwa terdapat satu salinan simpul-simpul graf $Shack(K_n, e_i, s)$ tidak dapat didominasi. Sehingga $\gamma_2(shack(K_n, e_i, s)) \neq \left\lceil\frac{s}{4}\right\rceil - 1$. Oleh karena itu, $\left\lceil\frac{s}{4}\right\rceil$ adalah simpul pendominasi yang minimal.

Teorema 4.3 Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang S_n sebanyak *t* salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil, untuk\ t \geq 2, n \geq 3$$

Bukti. Dalam teorema ini akan dibuktikan graf Bintang sebanyak t salinan dengan operasi *shackle* titik dan yang dihubungkan antara S_{n_i} dengan $S_{n_{i+1}}$ adalah simpul-simpul pendant dari graf Bintang bukan simpul pusatnya Representasi graf $Shack(S_n, v_i, t)$ dapat dilihat pada Gambar.

$Shack(S_n, v_i, t)$ adalah graf hasil operasi *shackle* titik dari graf Komplit S_n sebanyak t salinan dan v sebagai $lingkage\ vertex$. Jika sebuah graf S_n memiliki n simpul, maka $Shack(S_n, v_i, t)$ memiliki $nt - t + 1$ simpul. Terdapat dua kemungkinan himpunan elemen simpul pendominasi seperti penjelasan berikut.

1) jika $v \in S_2$
   Seperti yang diketahui berdasarkan definisi, graf Bintang memiliki diameter sama dengan dua $diam(S_n) = 2$. Oleh karena itu, jika graf S_n dioperasikan *shackle* titik maka sebuah simpul pendominasi (S_2) yang merupakan sebuah *linkage vertex* dapat mendominasi maksimal 2 salinan graf S_n. Sehingga untuk t salinan graf Bintang simpul pendominasi yang dibutuhkan adalah $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil$.
2) $v \notin S_2$
   Sedangkan jika elemen S_2 bukan diambil dari simpul-simpul *linkage vertex* maka untuk setiap simpul pendominasi maksimal hanya dapat mendominasi satu salinan graf Bintang. Hal ini dikarenakan jarak simpul pendominasi ke salinan simpul-simpul graf Bintang yang berikutnya bisa mencapai 4 $d(S_2, V(S_{n+1})) \leq 4$.

Oleh karena itu, kemungkinan pertama lebih optimal jika $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil$. Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil$ adalah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul pada $Shack(S_n, v_i, t)$. Andai $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) = \left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil - 1$, maka salinan maksimal yang dapat didominasi sampai jarak 2 adalah

$$2t\left(\left\lceil\frac{t}{2}\right\rceil - 1\right) \leq 2t\left(\frac{t+2t-1}{2t} - 1\right) = t - 1.$$

Dengan demikian jumlah salinan maksimal yang dapat didominasi adalah $t - 1$. sehingga terdapat minimal satu salinan graf $Shack(S_n, v_i, t)$ yang tidak didominasi, maka $\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t)) \neq \left\lceil\frac{t}{4}\right\rceil - 1$. Sehingga dapat disimpulkan bahwa $\left\lceil\frac{t}{4}\right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang mendominasi seluruh simpul $\boldsymbol{Shack(S_n, v_i, t)}$ maka $\boldsymbol{\gamma_2(Shack(S_n, v_i, t))} = \left\lceil \frac{t}{4} \right\rceil$.

Teorema 4.4 Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang $\boldsymbol{S_n}$ sebanyak *t* salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\boldsymbol{\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t))} = \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil, \boldsymbol{untuk\ t \geq 2, n \geq 3}$$

Bukti. Pembuktian untuk teorema ini tidak jauh berbeda dengan teorema sebelumnya. Karena $\boldsymbol{diam(S_n) = 2}$, maka jika ambil simpul pendominasi yang merupakan elemen simpul-simpul pendant yang tidak termasuk simpul yang dilekatkan dengan graf Bintang yang lain maka satu simpul hanya dapat mendominasi simpul-simpul pada satu salinan graf Bintang tersebut karena $\boldsymbol{d(S_2, V(S_{n+1}) \leq 3)}$. Sebaliknya jika kita ambil simpul-simpul pendominasi yang merupakan simpul-simpul penghubung dari dua sisi yang dilekatkan antar graf Bintang ($\boldsymbol{e_i}$) maka satu simpul maksimal dapat mendominasi tiga salinan graf Bintang $\boldsymbol{Shack(S_n, e_i, 3)}$. Oleh karena itu, jika terdapat *t* Salinan graf Bintang yang dioperasikan menggunakan $\boldsymbol{schakle}$ sisi maka akan dibutuhkan sebanyak $\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$ simpul untuk mendominasi semua simpul atau dituliskan $\boldsymbol{\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t))} = \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$.

Andai $\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$ bukan simpul pendominasi yang minasi ainimal, atau kita asumsikan $\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil - \boldsymbol{1}$ sebagai simpul pendominasi yang minimal, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$\boldsymbol{3t\left(\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil - 1\right) \leq 3t\left(\frac{t+3t-1}{3t} - 1\right) = t - 1}.$$

Karena simpul maksimal yang dapat didominasi hanya sebanyak $\boldsymbol{t-1}$ salinan sehingga dengan kata lain terdapat satu salinan graf graf bintang *Schakle* sisi yang tidak dapat terdominasi. Maka $\left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil - \boldsymbol{1}$ bukan simpul pendominasi yang minimal sehingga $\boldsymbol{\gamma_2(Shack(S_n, e_i, t))} = \left\lceil \frac{t}{3} \right\rceil$ adalah simpul pendominasi yang minimal.

Teorema 4.5 Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit *Berpendant* $\boldsymbol{K_{n,n}}$ sebanyak $\boldsymbol{t}$ salinan dengan operasi *shackle* titik adalah

$$\boldsymbol{\gamma_2\left(Shack(K_{n,n}, v_i, t)\right) = t, untuk\ t \geq 2, n \geq 3}$$

Bukti. Graf Komplit berpendant yang dioperasikan *Shackle* titik yang dimaksud dalam teorema ini yaitu dengan melekatkan titik pendant dari masing-masing $\boldsymbol{K_n}$seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.5.

Graf Komplit berpendant merupakan graf dengan diameter sama dengan tiga ($\boldsymbol{diam(K_{n,n}) = 3}$). Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\boldsymbol{\gamma_2(K_{n,n}) = 1}$ dengan $\boldsymbol{S_2} \notin$ simpul pendant, karena jika $\boldsymbol{S_2} \in$ simpul pendant maka $\boldsymbol{\gamma_2(K_{n,n})} > 1$ karena $\boldsymbol{d(p_i, p_{i+1}) = 3}$; $\boldsymbol{p_i, p_{i+1}}$ adalah simpul-simpul pendant pada $\boldsymbol{K_{n,n}}$.

Jika satu salinan graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$ memiliki bilangan dominasi jarak dua sama dengan satu, maka untuk $\boldsymbol{\gamma_2\left(Shack(K_{n,n}, v_i, 2)\right) = 2}$, $\boldsymbol{\gamma_2\left(Shack(K_{n,n}, v_i, 3)\right) = 3}$ begitu juga untuk $\boldsymbol{t}$ salinan graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$ membutuhkan minimal $\boldsymbol{t}$ bilangan dominasi jarak dua , $\boldsymbol{\gamma_2\left(Shack(K_{n,n}, v_i, t)\right) \leq t}$ dan setiap simpul pendominasi minimal dapat mendominasi $\boldsymbol{2n}$ simpul.

Selanjunya, akan diunjukkan apakah $\boldsymbol{t}$ adalah jumlah bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Andai , $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{t-1}$, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$(\boldsymbol{t-1})\boldsymbol{2n} = \boldsymbol{2nt} - \boldsymbol{2n} < 2\boldsymbol{nt} = \left|\boldsymbol{V}\left((\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{t})\right)\right|$$

sehingga $\boldsymbol{t-1}$ bukanlah simpul pendominasi yang minimal karena simpul-simpul yang didominasi kurang dari order atau banyaknya simpul pada graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$ dengan *t* salinan operasi *shackle* titik. Maka *t* adalah jumlah simpul pendominasi yang maksimal, atau dengan kata lain $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{t})\right) \leq \boldsymbol{t}$. Maka terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{t}$.

Teorema 4.6 Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit *Berpendant* $\boldsymbol{K_{n,n}}$ sebanyak $\boldsymbol{t}$ salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah

$$\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{t}, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}$$

Bukti. Dalam teorema ini graf Komplit berpendant yang dioperasikan *Shackle* sisi adalah sisi-sisi yang terhubung dengan *pendant* dari masing-masing $\boldsymbol{K_n}$seperti yang ditunjukkan pada Teorema 4.6. Order atau banyaknya simpul dari graf komplit berpendant dengan operasi *shackle* sisi adalah $\boldsymbol{2nt} - \boldsymbol{t} + \boldsymbol{1}$.

Graf Komplit ber*pendant* merupakan graf dengan diameter sama dengan tiga ($\boldsymbol{diam}(\boldsymbol{K_{n,n}}) = \boldsymbol{3}$). Dengan demikian dapat dikatakan bahwa $\boldsymbol{\gamma_2}(\boldsymbol{K_{n,n}}) = \boldsymbol{1}$ dengan $\boldsymbol{S_2} \notin$ simpul pendant, karena jika $\boldsymbol{S_2} \in$ simpul pendant maka $\boldsymbol{\gamma_2}(\boldsymbol{K_{n,n}}) > 1$ karena $\boldsymbol{d}(\boldsymbol{p_i}, \boldsymbol{p_{i+1}}) = \boldsymbol{3}$; $\boldsymbol{p_i}, \boldsymbol{p_{i+1}}$ adalah simpul-simpul pendant pada $\boldsymbol{K_{n,n}}$. Apabila dua salinan graf Komplit berpendant dioperasikan menggunakan operasi *shakle* sisi maka sesuai definisi operasi *shakle* mengakibatkan dua sisi dari masing-masing graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$ akan melekat menjadi satu sisi yang menyebabkan $\boldsymbol{diam}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{2})\right) = \boldsymbol{5}$ sehingga minimal terdapat dua simpul yang dapat mendominasi graf $\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{2})$. Hal ini juga berlaku untuk $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{3})\right) = \boldsymbol{3}$, $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{4})\right) = \boldsymbol{4}$ begitu juga untuk $\boldsymbol{t}$ salinan graf $\boldsymbol{K_{n,n}}$ membutuhkan minimal $\boldsymbol{t}$ bilangan dominasi jarak dua , $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})\right) \leq \boldsymbol{t}$ dengan ketentuan dua simpul pendominasi minimal dapat mendominasi $\boldsymbol{4n}$ simpul atau satu simpul dapat mendominasi minimal $\boldsymbol{2n}$ simpul.

Oleh karena itu jika $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{t-1}$ adalah simpul pendominasi yang minimal maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$(\boldsymbol{t-1})\boldsymbol{2n} = \boldsymbol{2nt} - \boldsymbol{2n} < 2\boldsymbol{nt} - \boldsymbol{t} + \boldsymbol{1};\ \textbf{untuk}\ \boldsymbol{t} > \boldsymbol{n}\ \textbf{maupun}\ \boldsymbol{n} > \boldsymbol{t}.$$

Sehingga $\boldsymbol{t-1}$ bukanlah simpul pendominasi yang minimal karena simpul-simpul yang didominasi kurang dari order atau banyaknya simpul pada graf $\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})$. Maka *t* adalah jumlah simpul pendominasi yang maksimal, atau dengan kata lain $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})\right) \leq \boldsymbol{t}$. Maka terbukti bahwa $\boldsymbol{\gamma_2}\left(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})\right) = \boldsymbol{t}$.

4. KESIMPULAN

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut.

1) Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit $\boldsymbol{K_n}$ sebanyak *s* salinan dengan operasi *shackle* titik adalah
$$\gamma_2(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_n}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{s})) = \left\lceil\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{4}}\right\rceil, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}$$
2) Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit $\boldsymbol{K_n}$ sebanyak *s* salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah
$$\gamma_2(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{K_n}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{s})) = \begin{cases} \left\lceil\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{5}}\right\rceil, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{n} = \boldsymbol{3}, \boldsymbol{4} \\ \left\lceil\frac{\boldsymbol{s}}{\boldsymbol{4}}\right\rceil, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{s} \geq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{5} \end{cases}$$
3) Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang $\boldsymbol{S_n}$ sebanyak *t* salinan dengan operasi *shackle* titik adalah
$$\gamma_2(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{S_n}, \boldsymbol{v_i}, \boldsymbol{t})) = \left\lceil\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{4}}\right\rceil, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}$$
4) Bilangan dominasi jarak dua pada graf Bintang $\boldsymbol{S_n}$ sebanyak *t* salinan dengan operasi *shackle* sisi adalah
$$\gamma_2(\boldsymbol{Shack}(\boldsymbol{S_n}, \boldsymbol{e_i}, \boldsymbol{t})) = \left\lceil\frac{\boldsymbol{t}}{\boldsymbol{2}}\right\rceil, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{t} \geq \boldsymbol{2}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{3}$$
5) Bilangan dominasi jarak dua pada graf Komplit *Berpendant*$\boldsymbol{K_{n,n}}$ sebanyak $\boldsymbol{m}$ salinan dengan operasi *shackle* titik dan sisi adalah
$$\gamma_2\left(\boldsymbol{Shack}\left(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{m}\right)\right) = \gamma_2\left(\boldsymbol{Shack}\left(\boldsymbol{K_{n,n}}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{m}\right)\right) = \left\lceil\frac{\boldsymbol{m}}{\boldsymbol{2}}\right\rceil, \boldsymbol{untuk}\ \boldsymbol{m}, \boldsymbol{n} \geq \boldsymbol{2}$$

DAFTAR PUSTAKA

J. Gross, J. Yellen, Graph Theory and Its Applications, Chapman &Hall/CRC, FL 33487-2742, (2006), Boca Raton, London.

W. Haynes, Teresa, Fundamental of Dominations in Graphs, (1998), New York : Marcel Dekker, Inc.

T.K. Maryati, A.N.M. Salman, E.T. Baskoro, J. Ryan and M. Miller,On H-Supermagic labelings for Ccertain *Shackle*s and Amalgamations of a Connected Graph, Utilitas Math. 83 (2010), 333-342.

Umilasari, R. 2015, Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb, Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya : ITS.

Vikade,W.D, 2016. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi, Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember : UNEJ.