

# Perbandingan Bilangan Dominasi Jarak Satu dan Dua pada Graf Hasil Operasi *Comb*

Reni Umilasari<sup>1)</sup>

<sup>1)</sup>Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember

Email : <sup>1)</sup>reni.umilasari@gmail.com

## ABSTRAK

Himpunan dominasi  $S$  pada graf  $G = (V, E)$  adalah subset dari  $V(G)$  sedemikian setiap simpul  $G$  yang bukan elemen  $S$  terhubung dan berjarak satu terhadap  $S$ . Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf  $G$  disebut bilangan dominasi dari graf  $G$  dan dinotasikan  $\gamma(G)$ . Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan  $S_2$ , yaitu subset dari  $V(G)$  sedemikian simpul  $G$  yang bukan elemen  $S_2$  memiliki jarak maksimal dua terhadap  $S_2$ . Bilangan dominasi jarak dua dari graf  $G$   $\gamma_2(G)$  adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam penelitian ini ditentukan bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan ( $P_m$ ), graf Lingkaran ( $C_n$ ), serta graf Bintang ( $S_m$ ) yang terdiri dari graf  $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n, P_m \triangleright S_n, C_n \triangleright P_m, C_n \triangleright C_m$  dan  $C_n \triangleright S_m$ . Selanjutnya, akan dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari hasil yang diperoleh.

**Kata kunci** : bilangan dominasi, himpunan dominasi, graf bintang, graf lingkaran, graf lintasan, operasi *comb*

## 1. PENDAHULUAN

Dominating secara matematis dikenalkan pada awal tahun 1960. Sejak saat itu baik himpunan dominasi maupun bilangan dominasi banyak digunakan dalam berbagai aplikasi. Salah satu contoh aplikasi dari bilangan dominasi adalah menentukan banyaknya pos pertolongan pertama pada suatu wilayah yang terjadi bencana alam. Misalkan wilayah tersebut terdiri dari banyak desa-desa kecil. Simpul dari graf mewakili desa-desa di wilayah tersebut. Sisi yang menghubungkan dua simpul menunjukkan bahwa pos pertolongan pertama darurat didirikan di salah satu desa yang juga dapat melayani desa lainnya. Kemudian, himpunan dominasi minimum dari graf akan merepresentasikan cara melayani seluruh wilayah dengan jumlah pos pertolongan pertama yang minimum.

Operasi antara dua graf merupakan salah satu cara untuk memperoleh bentuk graf-graf baru. Terdapat berbagai jenis operasi dalam graf, misalnya operasi join

(+), gabungan ( $\cup$ ), kartesian ( $\times$ ), korona ( $\odot$ ), dan operasi *comb* ( $\triangleright$ ). Misalkan  $G$  dan  $H$  adalah graf terhubung dan  $u$  adalah simpul di  $H$ . Operasi *comb* dari graf  $G$  dan graf  $H$  dinotasikan dengan  $G \triangleright H$  adalah graf yang diperoleh dengan mengambil satu kopian  $G$  dan  $|G|$  kopian dari  $H$  dan melekatkan simpul  $u$  dari masing-masing graf  $H$  kopian ke- $i$  pada simpul ke- $i$  dari graf  $G$  (Saputro et. al., 2013).

Himpunan dominasi (*dominating set*)  $S$  pada graf  $G$  adalah subset dari  $V(G)$  sedemikian setiap simpul  $G$  yang bukan elemen  $S$  terhubung dan berjarak satu terhadap  $S$ . Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf  $G$  disebut bilangan dominasi (*dominating number*) dari graf  $G$  dan dinotasikan  $\gamma(G)$  (Haynes & Teresa, 1996). Sedangkan himpunan dominasi jarak dua yang dinotasikan dengan  $S_2$ , yaitu subset dari  $V(G)$  sedemikian simpul  $G$  yang bukan elemen  $S_2$  terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap  $S_2$ . Bilangan dominasi jarak dua dari graf  $G$   $\gamma_2(G)$

adalah kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam artikel ini ditentukan bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan ( $P_m$ ) graf Lingkaran ( $C_n$ ), serta graf Bintang ( $S_m$ ) yang terdiri dari graf  $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n, P_m \triangleright S_n, C_n \triangleright P_m, C_n \triangleright C_m$  dan  $C_n \triangleright S_m$ . Selanjutnya, akan dicari relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari hasil yang diperoleh.

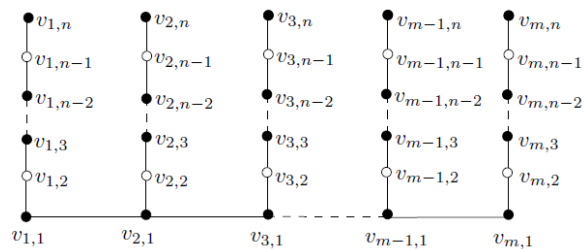
### 2. METODE PENELITIAN

Metode penelitian yang digunakan dalam penelitian ini meliputi: (a) Mengkonstruksi graf hasil operasi *comb* antara Lintasan ( $P_m$ ), lingkaran ( $C_n$ ), serta bintang ( $S_n$ ). (b) Menentukan himpunan dominasi minimum jarak satu dan dua dari graf hasil operasi *comb*. (c) Menentukan hipotesis bilangan dominasi jarak satu dan dua berdasarkan penentuan himpunan dominasi minimum. (d) Membuktikan hipotesis bilangan dominasi dari masing-masing graf. (e) Menentukan relasi antara bilangan dominasi jarak satu dan dua dari masing-masing graf.

### 3. HASIL DAN PEMBAHASAN

Dalam penelitian ini diperoleh hasil mengenai bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf  $P_m \triangleright P_n, P_m \triangleright C_n$ , dan  $P_m \triangleright S_n$ . Bilangan dominasi jarak satu graf hasil operasi *comb* tidak dapat digeneralisasi untuk sebarang dua graf. Hal ini dikarenakan nilai bilangan dominasi pada masing-masing graf hasil operasi *comb* pasti berbeda, yaitu tergantung pada graf yang dioperasikan dan simpul yang dilekatkan. Graf  $P_m \triangleright P_n$ , diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung  $P_n$  pada setiap simpul  $P_m$ . Untuk simpul graf  $C_n$  yang dilekatkan pada  $P_m$  dipilih sebarang simpul, sedangkan graf  $P_m \triangleright S_n$  diperoleh dengan

melekatkan salah satu pendants  $S_n$  pada setiap simpul  $P_m$ .



**Gambar 1.** Graf  $P_m \triangleright P_n$  untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  dengan Simpul-Simpul Warna Putih Merupakan Simpul Elemen Himpunan Dominasi Jarak Satu

◊**Teorema 0.1** Diberikan dua buah graf lintasan  $P_m$  dan  $P_n$  dengan masing-masing ordernya  $m$  dan  $n$  untuk  $m, n \geq 2$ . Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *comb*  $P_m \triangleright P_n$  adalah

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil, & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } n \equiv 2 \pmod{3} \\ m \left\lceil \frac{n}{3} \right\rceil + \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil, & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

**Bukti.** Misalkan  $V(P_m \triangleright P_n) = \{V_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan  $|P_m \triangleright P_n| = mn$ . Untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak satu pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka untuk masing-masing nilai  $n$  akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul  $S$  merupakan elemen simpul  $P_m$  dan  $P_n$ , sedangkan kasus kedua jika  $S$  hanya diambil dari simpul-simpul  $P_n$ .

**a.  $n \equiv 0 \pmod{3}$**

**Kasus 1 :**  $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$

Ambil simpul-simpul  $P_m$  sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu, yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3, dengan asumsi simpul yang berderajat tinggi dapat mendominasi lebih banyak simpul. Sehingga untuk setiap  $v_{i,1}$  dan  $\text{deg}(v_{i,1}) = 3$ , maka  $v_{i,1}$  dapat menjangkau maksimal 4 simpul, diantaranya  $v_{i,1}, v_{i-1,1}, v_{i+1,1}$  dan  $v_{i,2}$ . Karena

$v_{i,1}$  dengan  $1 \leq i \leq m$  merupakan Lintasan dengan  $m$  simpul, sehingga sesuai Goddard dan Henning (2006) maka bilangan dominasi jarak satu pada  $P_m$  adalah  $\gamma(P_m) = \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$ . Simpul-simpul  $P_n$  yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada  $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  kali graf. Lintasan  $P_{n-2}$  dan  $m - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  kali graf Lintasan  $P_{n-1}$ . Dengan demikian dapat ditentukan bahwa  $\gamma(P_{n-1}) = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$  dan  $\gamma(P_{n-2}) = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$ . Karena  $n \in \mathbb{Z}^+$  dan  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , maka dapat ditulis bahwa  $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \frac{n}{3}$ . Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada  $P_m \triangleright P_n$  untuk kasus pertama adalah

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor \left( \frac{n}{3} \right) + \left( m - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor \right) \left( \frac{n}{3} \right) + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor = \frac{mn}{3} + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$$

**Kasus 2 :  $S \in V(P_n)$**

Karena graf  $P_m \triangleright P_n$  diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul ujung  $P_n$  pada setiap simpul  $P_m$ , maka dapat dikatakan bahwa graf  $P_m \triangleright P_n$  merupakan graf yang terdiri dari  $m$  kali Lintasan  $P_n$ . Karena  $\gamma(P_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  dan  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , maka dapat ditulis bahwa  $\gamma(P_n) = \frac{n}{3}$ , sehingga

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma(P_n)) = \frac{mn}{3}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa  $\frac{mn}{3} \leq \frac{mn}{3} + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$ , maka bilangan dominasi pada  $P_m \triangleright P_n$  lebih minimal jika dipilih simpul-simpul elemen  $S$  pada  $V(P_n)$ . Dengan demikian, diambil batas atas bilangan dominasi jarak satu pada  $P_m \triangleright P_n$  yaitu  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{3}$ .

Selanjutnya untuk menunjukkan apakah  $\frac{mn}{3}$  merupakan bilangan dominasi yang minimum, dimisalkan  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{3} - 1$ . Karena setiap simpul pada  $S$  maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan  $n \equiv 0 \pmod{3}$ , maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left( \frac{mn}{3} - 1 \right) 3 = mn - 3 < mn$$

Karena banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyak simpul atau order pada  $P_m \triangleright P_n$ , maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Hal tersebut menunjukkan bahwa  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \not\leq \frac{mn}{3} - 1$  dan  $\frac{mn}{3}$  merupakan bilangan dominasi minimum pada  $P_m \triangleright P_n$ . Sehingga terbukti bahwa  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{mn}{3}$ .

Sebagai contoh perhatikan Gambar 1, tanpa mengurangi perumuman jika  $v_{i,2}$  bukan elemen dari  $S$  maka simpul  $v_{i,3}$ ,  $v_{i,2}$ , dan  $v_{i,1}$  tidak dapat didominasi oleh simpul manapun yang menjadi elemen  $S$ .

**b.  $n \equiv 1 \pmod{3}$**

**Kasus 1 :  $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$**

Sama seperti pembuktian sebelumnya, jika simpul-simpul  $P_m$  diambil sebagai simpul elemen  $S$ , yaitu simpul-simpul dengan derajat sama dengan 3, maka  $\gamma(P_m) = \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  dan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi oleh  $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  simpul adalah  $4 \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  simpul. Simpul-simpul  $P_n$  yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada  $\lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  kali graf Lintasan  $P_{n-2}$  dan  $m - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$  kali graf Lintasan  $P_{n-1}$ . Sehingga, dapat ditentukan bahwa  $\gamma(P_{n-1}) = \lfloor \frac{n-1}{3} \rfloor$  dan  $\gamma(P_{n-2}) = \lfloor \frac{n-2}{3} \rfloor$ . Karena  $n \in \mathbb{Z}^+$  dan  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , maka dapat ditulis bahwa  $\gamma(P_{n-1}) = \gamma(P_{n-2}) = \frac{n-1}{3}$ . Sehingga banyak himpunan dominasi jarak satu pada  $P_m \triangleright P_n$  jika  $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$  adalah

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \lfloor \frac{m}{3} \rfloor \left( \frac{n-1}{3} \right) + \left( m - \lfloor \frac{m}{3} \rfloor \right) \left( \frac{n-1}{3} \right) + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor = \frac{m(n-1)}{3} + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor$$

**Kasus 2 :  $S \in V(P_n)$**

Karena  $n \equiv 1 \pmod{3}$  dan  $\gamma(P_n) = \lfloor \frac{n}{3} \rfloor$  maka dapat ditulis bahwa  $\gamma(P_n) = \lfloor \frac{n+2}{3} \rfloor$ . Sehingga,

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma(P_n))$$

$$= \frac{m(n+2)}{3}$$

Dari kasus 1 dan 2 dapat dilihat bahwa  $\frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+2)}{3}$ . Dengan demikian, batas atas minimal bilangan dominasi jarak satu pada  $P_m \triangleright P_n$  yang diambil adalah  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

Untuk menunjukkan batas bawah, terlebih dahulu akan dijelaskan banyaknya simpul maksimal yang dapat didominasi oleh masing-masing simpul seperti berikut ini.

(i.) Untuk  $S \in P_m$

Karena satu simpul  $S$  pada  $P_m$  maksimal dapat mendominasi 4 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah  $4\lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

(ii.) Untuk  $S \in P_{n-1}$

Karena satu simpul  $S$  pada  $P_{n-1}$  maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah  $3(m - \lceil \frac{m}{3} \rceil) \binom{n-1}{3}$

(iii.) Untuk  $S \in P_{n-2}$

Karena satu simpul maksimal dapat mendominasi 3 simpul dan  $|P_{n-2}| = n-2$  mengakibatkan  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , maka untuk setiap  $P_{n-2}$  terdapat  $n-4$  simpul yang masing-masing mendominasi 3 simpul dan satu simpul mendominasi 2 simpul. Sehingga banyak simpul yang dapat didominasi adalah  $3 \left( \lceil \frac{m}{3} \rceil \binom{n-4}{3} \right) + 2 \left( \lceil \frac{m}{3} \rceil \cdot 1 \right)$ .

Berikutnya untuk menunjukkan  $\frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$  adalah bilangan dominasi yang paling minimum dimisalkan  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$  dan diasumsikan simpul yang berkurang merupakan simpul anggota  $V(P_m)$ . Sehingga dari (i.) sampai (iii.) banyak simpul maksimal yang dapat didominasi yaitu

$$4 \left( \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1 \right) + 3 \left( m - \lceil \frac{m}{3} \rceil \right) \binom{n-1}{3}$$

$$+ \left( \lceil \frac{m}{3} \rceil \binom{n-4}{3} \right) + 2 \left( \lceil \frac{m}{3} \rceil \cdot 1 \right)$$

$$= mn - m + 2 \left\lceil \frac{m}{3} \right\rceil - 4 < mn$$

Karena banyaknya simpul yang terdominasi lebih kecil dari banyaknya simpul pada  $P_m \triangleright P_n$  maka  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \not\leq \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ . Sehingga terbukti bahwa  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

**c.  $n \equiv 2 \pmod{3}$**

**Kasus 1 :  $S \in V(P_m) \cup V(P_n)$**

Untuk  $n \equiv 2 \pmod{3}$  pada kasus pertama juga diambil simpul-simpul  $P_m$  yang berderajat 3 sebagai elemen himpunan dominasi jarak satu. Karena  $\gamma(P_m) = \lceil \frac{m}{3} \rceil$  dan simpul-simpul  $P_n$  yang belum terdominasi merupakan simpul-simpul pada  $\lceil \frac{m}{3} \rceil$  kali graf Lintasan  $P_{n-2}$  dan  $m - \lceil \frac{m}{3} \rceil$  kali graf Lintasan  $P_{n-1}$  dengan  $\gamma(P_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{3} \rceil$  dan  $\gamma(P_{n-2}) = \lceil \frac{n-2}{3} \rceil$ . Karena  $n \in \mathbb{Z}^+$  dan  $n \equiv 2 \pmod{3}$ , maka dapat ditulis bahwa  $\gamma(P_{n-1}) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$  dan  $\gamma(P_{n-2}) = \lceil \frac{n-2}{3} \rceil$ . Oleh karena itu, banyak simpul  $S$  pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah

$$\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \lceil \frac{m}{3} \rceil \left( \frac{n-2}{3} \right) + \left( m - \lceil \frac{m}{3} \rceil \right) \left( \frac{n+1}{3} \right)$$

$$+ \lceil \frac{m}{3} \rceil$$

$$= \frac{m(n+1)}{3}$$

**Kasus 2 :  $S \in V(P_n)$**

Sama seperti kasus 2 pada  $n \equiv 0 \pmod{3}$  dan  $n \equiv 1 \pmod{3}$ , maka  $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n}{3} \rceil$  dan dapat dituliskan  $\gamma(P_n) = \lceil \frac{n+1}{3} \rceil$ . Sehingga bilangan dominasi jarak satu pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah

$$(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma(P_n))$$

$$= \frac{m(n+1)}{3}$$

Baik kasus 1 maupun kasus 2 menunjukkan nilai batas atas minimal yang sama, yaitu  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n+1)}{3}$ , dengan  $S$  dapat diambil dari simpul-simpul elemen  $P_n$ . Hal ini mengakibatkan pada setiap  $P_n$  terdapat  $\frac{n-2}{3}$  simpul yang masing-masing dapat mendominasi 3

simpul dan satu buah simpul yang mendominasi 2 simpul, karena  $n \equiv 2 \pmod{3}$ . Sehingga untuk  $m$  buah  $P_n$  pada  $P_m \triangleright P_n$ , maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah  $3 \left( m \binom{n-2}{3} \right) + 2(m \cdot 1)$ .

Andaikan  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n+1)}{3} - 1$ , misalkan diambil sebuah simpul pada  $P_n$  yang seharusnya dapat mendominasi maksimal 3 simpul sedemikian bukan elemen  $S$ . Maka banyak simpul yang dapat didominasi adalah

$$3 \left( m \binom{n-2}{3} - 1 \right) + 2(m \cdot 1) = mn - 3 < mn$$

Pernyataan di atas juga menunjukkan bahwa banyak simpul yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada  $P_m \triangleright P_n$ . Sehingga  $\gamma(P_m \triangleright P_n) \not\leq \frac{m(n+1)}{3} - 1$  dan terbukti bahwa  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = mn + 13$ .

Pada pembuktian di atas telah ditunjukkan bahwa bilangan dominasi untuk  $n \equiv 0 \pmod{3}$  dan  $n \equiv 2 \pmod{3}$  masing-masing  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{mn}{3}$  dan  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n+1)}{3}$ . Kedua pernyataan tersebut dapat digabung sedemikian  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = m \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor$ . Sedangkan untuk  $n \equiv 1 \pmod{3}$ ,  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-1)}{3} + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor = m \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{3} \right\rfloor$ .

Sedangkan untuk bilangan dominasi jarak dua, berikut ini juga akan ditunjukkan graf  $P_m \triangleright P_n$  sebagai perbandingan pembuktian dengan bilangan dominasi jarak satu seperti pada Teorema 1.

♦ **Teorema 0.2** Diberikan dua buah graf lintasan  $P_m \triangleright P_n$  dengan masing-masing ordernya  $m$  dan  $n$  untuk  $m, n \geq 2$ . Maka bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi  $comb P_m \triangleright P_n$  adalah

$$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor, & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{5}, n \equiv 3 \pmod{5}, n \equiv 4 \pmod{5} \\ m \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor, & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{5} \\ m \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{5} \right\rfloor, & \text{jika } n \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$$

**Bukti.** Misalkan  $V(P_m \triangleright P_n) = \{V_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dan  $|P_m \triangleright P_n| = mn$ . Berdasarkan definisi operasi *comb*, maka simpul ujung  $P_n$  yang melekat pada graf  $P_m$  dapat dikatakan sebagai simpul-simpul  $P_n$  atau pun simpul-simpul  $P_m$ . Oleh karena itu, untuk menunjukkan banyak simpul minimal yang menjadi elemen himpunan dominasi jarak dua pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka untuk masing-masing nilai  $n$  akan dibagi menjadi dua kasus. Kasus pertama jika simpul-simpul  $S$  hanya diambil dari simpul-simpul  $P_n$ , sedangkan kasus kedua jika  $S_2$  diambil dari  $V(P_m) \cup V(P_n)$  dengan ketentuan simpul  $S_2$  diambil terlebih dahulu dari  $V(P_n)$  sebanyak kelipatan 5, karena satu simpul elemen  $S_2$  pada  $P_n$  dapat mendominasi maksimal 5 simpul. Kemudian dilanjutkan pada simpul-simpul  $V(P_n)$  yang terhubung atau memiliki jarak terkecil dengan  $V(P_m)$  yang belum terdominasi.

**a.  $n \equiv 0 \pmod{5}$**

**Kasus 1 :  $S_2 \in V(P_n)$**

Menurut Umilasari dan Darmaji (2015) bahwa  $\gamma_2(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ , karena  $n \equiv 0 \pmod{5}$  dan  $n \in \mathbb{Z}^+$  maka bilangan dominasi jarak dua pada setiap  $P_{i,n}$  adalah  $\gamma_2(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$  yang nilainya adalah  $\gamma_2(P_n) = \left\lfloor \frac{n}{5} \right\rfloor$ . Karena terdapat  $m$  buah  $P_n$  pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m \left( \gamma_2(P_m \triangleright P_n) \right) = \frac{mn}{5}$ .

**Kasus 2 :  $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$**

Karena  $n \equiv 0 \pmod{5}$ , maka dari kasus pertama semua simpul sudah dapat didominasi dengan jarak maksimal dua. Oleh karena itu, batas atas minimal yang diambil dari bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{5}$ .

Selanjutnya akan ditunjukkan apakah  $\frac{mn}{5}$  merupakan bilangan dominasi yang minimum pada graf  $P_m \triangleright P_n$ . Andaikan  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$ . Karena setiap simpul elemen  $S_2$  maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul yang dapat didominasi jika  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{mn}{5} - 1$  adalah

$$5 \left( \frac{mn}{5} - 1 \right) = mn - 5 < mn$$

Dengan demikian,  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \not\leq \frac{mn}{5} - 1$ , karena terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga terbukti bahwa  $\frac{mn}{5}$  adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{mn}{5}$

**b.  $n \equiv 1 \pmod{5}$**

**Kasus 1 :  $S \in V(P_n)$**

Untuk setiap  $P_{i,n}$  bilangan dominasi jarak dua pada  $P_n$  adalah  $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$ , karena  $n \equiv 1 \pmod{5}$  dan  $n \in \mathbb{Z}^+$ , maka  $\gamma_2(P_n) = \frac{n+4}{5}$ . Karena terdapat  $m$  buah  $P_n$  pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+4)}{5}$ .

**Kasus 2 :  $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$**

Karena  $n \equiv 1 \pmod{5}$ , maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada  $P_{n-1}$ . Sebagaimana disebutkan dalam Umilasari dan Darmaji (2015) bahwa  $\gamma_2(P_{n-1}) = \lceil \frac{n-1}{5} \rceil$ . Karena  $m \in \mathbb{Z}^+$  dengan  $m \equiv 1 \pmod{3}$ , maka  $\gamma_2(P_{n-1}) = \frac{n-1}{5}$ . Sehingga untuk  $m$  buah  $P_{n-1}$  maka bilangan dominasi jarak duanya adalah  $m \frac{(n-1)}{5}$ . Sedangkan satu simpul pada  $P_n$  yang belum terdominasi yang juga merupakan simpul-simpul  $V(P_m)$  memiliki bilangan dominasi  $\lceil \frac{m}{5} \rceil$ .

Dengan demikian bilangan dominasi pada graf  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$ .

Dari kasus 1 dan 2 tersebut dapat dilihat bahwa  $\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil \leq \frac{m(n+4)}{5}$ , sehingga diambil batas yang minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$ , yaitu  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$ .

Andaikan  $\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$  bukan bilangan dominasi yang minimal, misalkan  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$ . Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah  $(\frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1)5$ , karena  $m \in \mathbb{Z}^+$  dan  $m \equiv 0 \pmod{5}$ , maka  $\lceil \frac{m}{5} \rceil = \frac{m}{5}$ .

Sehingga

$$\begin{aligned} \left( \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1 \right) 5 &= \left( \frac{m(n-1)}{5} + \frac{m}{5} - 1 \right) 5 \\ &= mn - 5 < mn \end{aligned}$$

Dengan demikian, simpul yang terdominasi kurang dari order pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \not\leq \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil - 1$  dan terbukti bahwa  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-1)}{5} + \lceil \frac{m}{5} \rceil$  adalah bilangan dominasi jarak dua yang minimal.

**c.  $n \equiv 2 \pmod{5}$**

**Kasus 1:  $S_2 \in V(P_m)$**

Untuk setiap  $P_{i,n}$  bilangan dominasi jarak dua pada  $P_n$  adalah  $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$ , karena  $n \in \mathbb{Z}^+$  dan  $n \equiv 2 \pmod{5}$ , maka  $\gamma_2(P_n) = \frac{n+3}{5}$ . Karena terdapat  $m$  buah  $P_n$  pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+3)}{5}$ .

**Kasus 2:  $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$**

Karena  $n \equiv 2 \pmod{5}$ , maka terlebih dahulu ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada  $P_{n-2}$ . Sebagaimana pada pembuktian-pembuktian sebelumnya, maka  $\gamma_2(P_{n-2}) = \frac{n-2}{5}$ . Sehingga untuk  $m$  buah  $P_{n-2}$  maka bilangan dominasi jarak duanya adalah  $\frac{m(n-2)}{5}$ .

Sedangkan dua simpul pada setiap  $P_n$  yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul  $V(P_m)$ . Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan graf  $P_m$  yang masing-masing simpulnya terhubung dengan sebuah simpul. Setiap simpul yang belum terdominasi tersebut isomorfis dengan graf  $P_m \odot G_1$ ,  $G_1$  adalah trivial yang hanya memiliki satu simpul. Sehingga menurut Umilasari dan Darmaji (2015)  $\gamma_2(P_m \odot G_1) = m \cdot 3$ . Dengan demikian bilangan dominasi pada graf  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

Dua kemungkinan batas atas minimal bilangan dominasi jarak dua pada kasus 1 dan 2 menunjukkan  $\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil \leq \frac{m(n+3)}{5}$ , sehingga diambil batas minimal untuk bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$ , yaitu  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

Misalkan  $\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$  bukan bilangan dominasi yang minimal. Andaikan  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1$ . Karena setiap simpul maksimal dapat mendominasi 5 simpul, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah  $(\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1) \cdot 5$ .

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil - 1\right) \cdot 5 \\ & < \left(\frac{m(n-2)}{5} + \left(\frac{m}{3} + 1\right) - 1\right) \cdot 5 \\ & = mn - 2m + \frac{5m}{3} \end{aligned}$$

Karena  $mn - 2m + \frac{5m}{3} < mn$ , sehingga terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \not\leq mn - 25 + m \cdot 3 - 1$  dan terbukti bahwa  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-2)}{5} + \lceil \frac{m}{3} \rceil$ .

**d.  $n \equiv 3 \pmod{5}$**

**Kasus 1 :  $S_2 \in V(P_n)$**

Untuk setiap  $P_{i,n}$ , bilangan dominasi jarak dua pada  $P_n$  adalah  $\gamma_2(P_n) = \lceil \frac{n}{5} \rceil$ , karena  $n \equiv 3 \pmod{5}$  dan  $n \in \mathbb{Z}^+$ , maka  $\gamma_2(P_n) = \frac{n+2}{5}$ . Karena terdapat  $m$  buah  $P_n$  pada graf

$P_m \triangleright P_n$ , maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+2)}{5}$ .

**Kasus 2 :  $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$**

Karena  $n \equiv 3 \pmod{5}$ , maka terlebih ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada  $P_{n-3}$ . Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka  $\gamma_2(P_{n-3}) = \frac{n-3}{5}$ .

Sehingga untuk  $m$  buah  $P_{n-3}$  maka bilangan dominasi jarak duanya adalah  $\frac{m(n-3)}{5}$ . Sedangkan tiga simpul pada

setiap  $P_n$  yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul  $V(P_m)$ . Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi sama dengan  $m$  buah graf  $P_3$  dengan salah satu simpul ujungnya terhubung dan membentuk lintasan  $P_m$ . Karena jarak terjauh untuk setiap simpul  $P_m$  pada simpul  $P_n$  yang belum terdominasi sama dengan 2, maka setiap simpul  $P_m$  diambil sebagai elemen  $S_2$ , sehingga kedua simpul  $P_n$  tersebut dapat didominasi. Dengan demikian bilangan dominasi jarak dua pada graf  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m$ .

Karena  $\frac{m(n+2)}{5} = \frac{m(n-3)}{5} + m$ , sehingga kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama.

Sehingga  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m$ .

Selanjutnya, misalkan  $\frac{m(n-3)}{5} + m$  bukan bilangan dominasi yang minimal.

Andaikan  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-3)}{5} + m - 1$ ,

karena setiap simpul dari  $\frac{m(n-3)}{5}$  simpul dapat mendominasi maksimal 5 simpul dan setiap simpul dari  $m$  simpul dapat mendominasi 3 simpul. Maka jika diambil sebuah simpul dari  $\frac{m(n-3)}{5}$  simpul bukan menjadi elemen  $S_2$  pada  $P_n$  mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-3)}{5} - 1\right)5 + m \cdot 3 = mn - 5 < mn$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi, karena jumlah simpul maksimal yang dapat didominasi kurang dari banyaknya simpul pada  $P_m \triangleright P_n$ . Sehingga  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq mn - 35 + m - 1$  dan terbukti bahwa  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-3)}{5} + m$  atau  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = mn + 25$ .

**e.  $n \equiv 4 \pmod{5}$**

**Kasus 1 :  $S_2 \in V(P_n)$**

Untuk setiap  $P_{i,n}$ , bilangan dominasi jarak dua pada  $P_n$  adalah  $\gamma_2(P_n) = \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ , karena  $n \equiv 4 \pmod{5}$  dan  $n \in \mathbb{Z}^+$ , maka  $\gamma_2(P_n) = \frac{n+1}{5}$ . Karena terdapat  $m$  buah  $P_n$  pada graf  $P_m \triangleright P_n$ , maka batas atas bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq m(\gamma_2(P_n)) = \frac{m(n+1)}{5}$ .

**Kasus 2 :  $S_2 \in V(P_n) \cup V(P_m)$**

Karena  $n \equiv 4 \pmod{5}$ , maka pertama kali ditentukan bilangan dominasi jarak dua pada  $P_{n-4}$ . Sama seperti pembuktian sebelumnya, maka  $\gamma_2(P_{n-4}) = \frac{n-4}{5}$ . Sehingga untuk  $m$  buah  $P_{n-4}$  maka bilangan dominasi jarak duanya adalah  $\frac{m(n-4)}{5}$ . Sedangkan 4 simpul pada setiap  $P_n$  yang belum terdominasi salah satunya merupakan simpul-simpul  $V(P_m)$ . Sehingga himpunan simpul yang belum terdominasi terdiri dari  $m$  buah graf  $P_4$  dengan salah satu simpul ujungnya terhubung membentuk lintasan  $P_m$ , karena jarak terjauh untuk setiap simpul  $P_m$  pada simpul  $P_n$  yang belum terdominasi sama dengan 3, maka jika diambil simpul  $P_m$  sebagai elemen  $S_2$  mengakibatkan banyaknya himpunan dominasi yang dibutuhkan untuk menjangkau simpul-simpul yang belum terdominasi tidak akan minimum, karena simpul yang dibutuhkan pasti lebih dari  $m$  simpul. Sehingga untuk kasus ini minimal

diambil satu simpul untuk masing-masing  $P_4$  dan bukan  $v_{i,1}$  atau pun  $v_{i,4}$ , karena  $d(v_{i,1}, v_{i,4}) = 3$ . Dengan demikian dibutuhkan minimal  $m$  simpul dengan masing-masing simpul dapat mendominasi 4 simpul, yaitu  $v_{i,2}$  atau  $v_{i,3}$ . Karena  $i = 1, 2, \dots, m$ , maka bilangan dominasi jarak dua pada graf  $P_m \triangleright P_n$  adalah  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m = \frac{m(n+1)}{5}$ .

Kasus 1 dan 2 menunjukkan bilangan dominasi jarak dua minimal yang sama. Sehingga kita dapat mengambil batas atas bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  yaitu  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m$ .

Andaikan  $\frac{m(n-4)}{5} + m$  bukan bilangan dominasi jarak dua yang minimal. Misalkan  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m - 1$ , yaitu dengan mengambil sebarang satu simpul pada  $P_n$  sedemikian tidak lagi menjadi elemen  $S_2$ . Hal ini mengakibatkan banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah

$$\left(\frac{m(n-4)}{5} - 1\right)5 + m \cdot 4 = mn - 5 < mn$$

Dengan demikian terdapat beberapa simpul yang tidak dapat didominasi. Sehingga

$$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) \leq \frac{m(n-4)}{5} + m - 1 \text{ dan terbukti bahwa } \gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n-4)}{5} + m \text{ atau } \gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \frac{m(n+1)}{5}.$$

Masing-masing nilai  $n$  pada kelima pembuktian di atas menunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada  $P_m \triangleright P_n$  berbeda-beda. Untuk  $n \equiv 0 \pmod{5}$ ,  $n \equiv 3 \pmod{5}$ , dan  $n \equiv 4 \pmod{5}$  dapat disimpulkan bahwa  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor$ . Untuk  $n \equiv 1 \pmod{5}$ ,  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor$ , sedangkan untuk  $n \equiv 2 \pmod{5}$ ,  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = mn + m3$ .

♦ **Teorema 0.3** Diberikan graf lingkaran  $C_n$  dan graf bintang  $S_m$  dengan masing-masing ordernya  $n$  dan  $m$  untuk  $n, m \geq 3$ .



Maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi  $comb C_n \triangleright S_m$  adalah  $\gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$ .

**Bukti.** Graf  $C_n \triangleright S_m$  adalah graf yang diperoleh dengan melekatkan salah satu simpul *pendant* dari masing-masing graf  $S_m$  kopian ke-*i* pada setiap simpul graf  $C_n$ . Maka  $|C_n \triangleright S_m| = n(m+1)$ . Berdasarkan Observasi dalam Umilasari dan Darmaji (2015) diketahui bahwa  $\gamma_2(S_m) = 1$ . Karena terdapat *n* kopi graf  $S_m$  pada  $C_n \triangleright S_m$ , maka maksimal terdapat *n* simpul elemen himpunan dominasi jarak dua. Sehingga dapat dituliskan bahwa  $|S_2| = \gamma_2(C_n \triangleright S_m) \leq n$ .

Andaikan  $\gamma_2(C_n \triangleright S_m) \leq n-1$ , maka terdapat  $S_m$  kopian ke-*i* yang semua simpulnya bukan elemen himpunan dominasi jarak dua. Seperti yang diketahui bahwa graf Bintang  $S_m$  memiliki diameter sama dengan 2. Sehingga pastilah terdapat  $v_i$  elemen  $S_m$  sedemikian  $d(v_i, S_2) > 2$ . Oleh karena itu,  $|S_2| \leq n-1$ , sehingga *n* adalah bilangan dominasi jarak dua minimum pada graf  $C_n \triangleright S_m$ . Dengan demikian terbukti bahwa  $|S_2| = \gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$ .

Untuk graf-graf yang lain seperti graf  $P_m \triangleright C_n, C_n \triangleright P_m$  dan  $C_n \triangleright P_m$  pembuktian bilangan dominasi jarak satu dan dua analog dengan pembuktian pada Teorema 1 dan 2. Sedangkan bilangan dominasi jarak satu dan dua dari graf  $P_m \triangleright S_n$  dan  $C_n \triangleright S_m$  analog dengan Teorema 3. Oleh karena itu, secara umum nilai bilangan dominasi jarak satu dan dua dari semua graf yang diamati dapat dilihat pada Tabel 1 dan Tabel 2.

Dari kedua tabel tersebut dapat dilihat bahwa secara umum tidak dapat disimpulkan perbandingan antara bilangan dominasi jarak satu dengan bilangan dominasi jarak dua pada graf yang sama. Sebagai contoh, menurut Goddard dan Henning (2006) graf

Lintasan  $P_m$  memiliki bilangan dominasi jarak satu yaitu  $\gamma = \lceil \frac{m}{3} \rceil$ , dalam Umilasari dan Darmaji (2015) diketahui bilangan dominasi jarak dua pada graf Lintasan  $P_m$  adalah  $\gamma_2(P_m) = \lceil \frac{m}{5} \rceil$ .

Sedangkan graf Bintang seperti yang diketahui memiliki bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua yang sama yaitu  $\gamma(S_n) = \gamma_2(S_n) = 1$ . Begitu juga untuk graf hasil operasi, graf hasil operasi  $comb$  antara graf Lintasan dengan graf Bintang memiliki bilangan dominasi jarak satu dan jarak dua yang sama. Akan tetapi tidak berlaku untuk  $P_m \triangleright P_n$  dan  $P_m \triangleright C_n$  serta graf yang lainnya. Hal ini dikarenakan oleh beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

**Tabel 1.** Ringkasan Bilangan Dominasi Jarak Satu pada Graf Hasil Operasi  $Comb$

Graf	Bilangan Dominasi Jarak Dua
$P_m \triangleright P_n$	$\gamma(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } n \equiv 2 \pmod{3} \\ m \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
$P_m \triangleright C_n$	$\gamma(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } n \equiv 2 \pmod{3} \\ m \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
$P_m \triangleright S_n$	$\gamma(P_m \triangleright S_n) = m$
$C_n \triangleright P_m$	$\gamma(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3} \text{ dan } m \equiv 2 \pmod{3} \\ n \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
$C_n \triangleright C_m$	$\gamma(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n \lceil \frac{m}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3}, m \equiv 2 \pmod{3} \\ n \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lceil \frac{n}{3} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
$C_n \triangleright S_m$	$\gamma(C_n \triangleright S_m) = n$

**Tabel 2.** Ringkasan Bilangan Dominasi Jarak Dua pada graf Hasil Operasi  $Comb$

Graf	Bilangan Dominasi Jarak Dua
$P_m \triangleright P_n$	$\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{5}, n \equiv 3 \pmod{5} \\ & n \equiv 4 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$
$P_m \triangleright C_n$	$\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{5}, n \equiv 4 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } n \equiv 2 \pmod{5}, n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$
$P_m \triangleright S_n$	$\gamma_2(P_m \triangleright S_n) = m$
$C_n \triangleright P_m$	$\gamma_2(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n \lceil \frac{m}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{5}, m \equiv 3 \pmod{5}, \\ & n \equiv 4 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$
$C_n \triangleright C_m$	$\gamma_2(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} \frac{nm}{5} & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{5}, m \equiv 4 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lceil \frac{n}{5} \rceil & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{5}, m \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$
$C_n \triangleright S_m$	$\gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$

**D. KESIMPULAN DAN SARAN**

Berdasarkan hasil penelitian diperoleh beberapa kesimpulan sebagai berikut.

1. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Bintang adalah

$$\gamma(P_m \triangleright S_n) = \gamma_2(P_m \triangleright S_n) = m$$

2. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lingkaran dan Bintang adalah

$$\gamma(C_n \triangleright S_m) = \gamma_2(C_n \triangleright S_m) = n$$

3. Bilangan dominasi jarak satu pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Lingkaran antara lain:

- a.  $\gamma(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{3}, n \equiv 2 \pmod{3} \\ m \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor; & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
- b.  $\gamma(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{3}, n \equiv 2 \pmod{3} \\ m \lfloor \frac{n}{3} \rfloor + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor; & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
- c.  $\gamma(C_n \triangleright P_m) = \begin{cases} n \lfloor \frac{m}{3} \rfloor; & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3}, n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$
- d.  $\gamma(C_n \triangleright C_m) = \begin{cases} n \lfloor \frac{m}{3} \rfloor; & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{3}, n \equiv 2 \pmod{3} \\ n \lfloor \frac{m}{3} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor; & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$

4. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi *comb* antara graf Lintasan dan Lingkaran antara lain:

- a.  $\gamma_2(P_m \triangleright P_n) = \begin{cases} m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{5}, n \equiv 3 \pmod{5}, n \equiv 4 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor & \text{jika } n \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$
- b.  $\gamma_2(P_m \triangleright C_n) = \begin{cases} m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor & \text{jika } n \equiv 0 \pmod{5}, n \equiv 4 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{5} \rfloor & \text{jika } n \equiv 1 \pmod{5} \\ m \lfloor \frac{n}{5} \rfloor + \lfloor \frac{m}{3} \rfloor & \text{jika } n \equiv 2 \pmod{5}, n \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$
- c.  $\gamma_2(C_n \triangleleft P_m) = \begin{cases} n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{5}, m \equiv 3 \pmod{5}, m \equiv 4 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{5} \rfloor & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{5} \end{cases}$
- d.  $\gamma_2(C_n \triangleleft C_m) = \begin{cases} \frac{nm}{5} & \text{jika } m \equiv 0 \pmod{5}, m \equiv 4 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{5} \rfloor & \text{jika } m \equiv 1 \pmod{5} \\ n \lfloor \frac{m}{5} \rfloor + \lfloor \frac{n}{3} \rfloor & \text{jika } m \equiv 2 \pmod{5}, m \equiv 3 \pmod{5} \end{cases}$

5. Bilangan dominasi jarak satu dan dua pada graf hasil operasi *comb* tidak

memiliki relasi atau perbandingan secara umum. Hal ini dikarenakan oleh beberapa faktor, seperti jarak antar simpul, pemilihan simpul elemen himpunan dominasi, derajat setiap simpul, diameter dan sebagainya.

Setelah dilakukan penelitian mengenai dimensi metrik (*dim*) dan dimensi partisi (*pd*) pada beberapa Famili Graf Tangga, maka diberikan saran bagi pembaca yang berminat meneliti di bidang ini, yaitu nilai dimensi metrik dan dimensi partisi pada graf khusus dan graf hasil operasi lainnya.

**DAFTAR PUSTAKA**

Chartrand, G. dan Lesniak, L., (1996), *Graphs and Digraph*, 3<sup>rd</sup> edition, Chapman & Hall/CRC, 2-6 Boundaru Row, London SE1 8HN, UK.

Gross, J. dan Yellen J., (2006), *Graph Theory and Its Applications*, Chapman & Hall/CRC, FL 33487-2742 Boca Raton, London.

Haynes, W. Teresa. (1996), *Fundamental of Dominations in Graphs*, New York: MarcelDekker, Inc.

Klav̆zar, S. (1995), "Dominating Cartesian Product of Cycles", *Discrete Applied Mathematics*, No.59, hal.129-136.

Saputro, S.W., Mardiana, N., dan Purwasi, I.A. (2013), "The Metric Dimension of *Comb*Product Graph", *Graph Theory Conference in Honor of Egawa 60th Birthday*.

Snyder, K. (2011), *c-Dominating Sets for Families of Graphs*, University of Mary Washington.

Umilasari, R. dan Darmaji, (2015), *Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb*, Tesis: Institut Teknologi Sepuluh Nopember