Bilangan Dominasi Jarak Dua Pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi

Ilham Saifudin[1)]

[1)]*Jurusan Teknik Informatika, Fakultas Teknik, Universitas Muhammadiyah Jember*
Jl. Karimata No. 49 Jember Kode Pos 68121
Email : [1)]ilham.saifudin@unmuhjember.ac.id

ABSTRAK

Untuk setiap graf $G = (V, E), S \subseteq V(G)$ dapat dikatakan himpunan dominasi dari G jika setiap simpul $u \in V(G)$ bertetangga dengan S. Dengan demikian untuk setiap simpul $u \in V(G)$, ada simpul $v \in S$ dimana jarak antara u dan v maksimal satu. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi di graf G disebut dengan bilangan dominasi. Pada paper ini akan ditentukan himpunan dominasi jarak dua pada graf G yang didefinisikan dengan $S_2 \subseteq V(G)$, dimana untuk setiap simpul $u \in V(G)$ ada simpul $w \in S_2$ dimana jarak antara u dan w maksimal dua. Kardinalitas minimum pada himpunan dominasi jarak dua di graf G disebut dengan bilangan dominasi jarak dua. Graf G yang dimaksud pada paper ini yaitu graf hasil operasi amalgamasi, diantaranya graf hasil operasi amalgamasi graf Helm, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga, graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship*.

Kata Kunci : Bilangan Dominasi Jarak Dua, Graf Hasil Operasi Amalgamasi

1. PENDAHULUAN

Bilangan dominasi merupakan salah satu topik yang menarik pada teori graf. Bilangan dominasi sudah ada sejak tahun 1850, bilangan dominasi ini muncul pada kalangan penggemar catur di Eropa yaitu penentuan berapa banyaknya ratu yang harus ditempatkan pada papan catur 8 × 8, sehingga semua petak pada papan catur dapat dikuasai oleh ratu dan jumlah ratu yang diletakkan pada papan catur harus minimal. Hasil penelitian sebelumnya diantaranya tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi oleh Wicha dan Slamin.

Bilangan dominasi dapat dikatakan sebagai banyaknya simpul pendominasi dalam suatu graf yang dapat mendominasi simpul-simpul terhubung di sekitarnya, dengan simpul pendominasi berjumlah minimal. Bilangan dominasi dinotasikan dengan $\gamma(G)$. Bilangan dominasi juga telah banyak diaplikasikan dalam kehidupan. Sebagai contoh pada penempatan mobil listrik pada lahan perkebunan, penempatan CCTV pada sudut-sudut tertentu agar dapat menjangkau area di sekitarnya pada jarak tertentu. Tujuan menerapkan himpunan dominasi pada penempatan mobil listrik ataupun CCTV yaitu agar lebih efisien dalam menempatkannya serta dapat meminimalisir jumlahnya, sehingga lebih maksimal dalam penggunaannya.

Dalam paper ini penulis meneliti bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi (Carlson, K. 2006) dan (Maryati, et al 2010), diantaranya adalah graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal\,(H_n, v, t)$, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $Amal\,(Fl_n, v, t)$, dan graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship* atau $Amal\,(f_n, v, t)$.

2. TINJAUAN PUSTAKA

Himpunan dominasi (dominating set) S pada graf G adalah subset dari $V(G)$ sedemikian setiap simpul G yang bukan elemen S terhubung dan berjarak satu terhadap S (Harary, et al F. 1969) dan (Haynes, T. W, et al. 1996). Kardinalitas minimum di antara himpunan dominasi pada graf G disebut bilangan dominasi (dominating number) dari graf G yang dinotasikan dengan $\gamma(G)$.

Himpunan dominasi jarak dua dinotasikan dengan S_2 yaitu subset dari $V(G)$ sedemikian simpul G yang bukan elemen S_2 terhubung dan memiliki jarak maksimal 2 terhadap S_2 (Darmaji, et al. 2014), (Sridharan, N, et al. 2002), dan (Umilasari, R. 2015). Bilangan dominasi jarak dua dari suatu graf dinotasikan dengan $\gamma_2(G)$, yaitu kardinalitas minimum dari himpunan dominasi jarak dua. Dalam menentukan simpul dominasi pada sebarang graf dapat menggunakan sebuah algoritma yang dinamakan algoritma greedy (Hedetniemi, S. T, et al. 1986) dan (Munir, R. 2004).

Lema yang digunakan

Lema 1. *Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf reguler G berderajat r adalah* $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$

Bukti. Graf G adalah graf reguler jumlah simpul sebanyak $|V|$ dan derajat setiap simpul adalah r. Berdasarkan observasi, simpul maksimal yang dapat didominasi oleh sebuah simpul pendominasi adalah $r^2 + 1$. Dengan demikian jumlah minimal simpul pendominasi adalah $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$. Jadi, $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal yang dapat mendominasi semua simpul di graf G. Andaikan $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $r^2 + 1\left(\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil\right) - 1 \leq r^2 + 1\left(\frac{|V|+r^2}{r^2+1} - 1\right) = |V| - 1$. Artinya, banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $|V| - 1$, maka terdapat minimal satu simpul yang belum terdominasi. Dengan demikian $S_2 = \gamma_2(G) \neq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil - 1$. Karena $\left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$ adalah jumlah minimal simpul pendominasi yang dapat mendominasi semua simpul di G maka $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{r^2+1} \right\rceil$.

Lema 2. *Bilangan dominasi jarak dua pada sebarang graf G adalah*

$$\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rceil.$$

(Vikade et al, 2016, 2016)

Bukti. Graf G adalah sebarang graf dengan jumlah simpul sebanyak $|V|$, misal x adalah sebuah simpul dengan derajat maksimal $\Delta(G)$ maka x sebagai himpunan dominasi dan $N_2[x]$ merupakan simpul berjarak dua dari x. Sehingga $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa $\left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G) + \sum N_2} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal. Andai $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil - 1$, maka banyak simpul maksimal yang dapat didominasi adalah $1 + \Delta(G) + \sum N_2 \left(\left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil - 1\right) \leq 1 + \Delta(G) + \sum N_2 \left(\frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} - 1\right) = |V| - 1$. Artinya banyak simpul yang dapat didominasi adalah |V |− 1, maka terdapat minimal satu simpul yang tidak didominasi. Dengan demikian $S_2 =$

$\gamma_2(G) \neq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil - 1$, karena $\left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal maka $\gamma_2(G) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+\sum N_2} \right\rceil$.

Teorema yang digunakan

Teorema 1. *Diberikan sebarang graf terhubung G sebanyak t kopi maka bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah*

$$\gamma_2\big(Amal(G,v,t)\big) = \begin{cases} 1 & ; untuk\ diam(G) \leq 2 \\ \gamma_2(G)t - t + 1 & ; untuk\ diam(G) yang\ lain \end{cases}$$

(Vikade et al, 2016, 2016)

Bukti. Diketahui $Amal(G,v,t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf G sebanyak t kopi dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf G memiliki n simpul, maka $Amal(G,v,t)$ memiliki $nt - t + 1$ simpul. Berikut ini akan dibuktikan bilangan dominasi jarak dua pada hasil operasi amalgamasi sebarang graf G yang memiliki diameter $diam(G) \leq 2$.

Sebuah graf G dengan $diam(G) \leq 2$, jika dioperasikan amalgamasi, mengakibatkan hasil operasi amalgamasi $Amal(G,v,t)$ memiliki diameter kurang dari atau sama dengan 4. Sehingga sebuah simpul pendominasi yang diletakkan di simpul terminal akan dapat mendominasi semuruh simpul pada $Amal(G,v,t)$. Dengan demikian $\gamma_2(Amal(G,v,t)) = 1$ dengan $diam(G) \leq 4$.

Selanjutnya untuk membuktikan hasil operasi amalgamasi pada sebarang graf G dengan $diam(G) > 2$ akan dibagi menjadi dua kasus yaitu $v \in S_2$ dan v bukan elemen S_2, dimana v adalah simpul terminal pada graf $Amal(G,v,t)$ dan S_2 adalah himpunan simpul dominasi jarak dua pada suatu graf G.

Kasus 1. $v \in S_2$

Pada kasus dimana $v \in S_2$ untuk jumlah kopian ke-1 sampai kopian ke t, bilangan dominasi jarak dua pada $Amal(G,v,t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

$t = 1 \rightarrow \gamma_2(G)$
$t = 2 \rightarrow 2\gamma_2(G) - 2 + 1 = 2\gamma2(G) - 1$
$t = 3 \rightarrow 3\gamma_2 G) - 3 + 1 = 3\gamma2(G) - 2$
$\vdots$
$t = t \rightarrow \gamma_2(G)t - t + 1$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi sebanyak t kopi adalah $\gamma_2(G)t - t + 1$. Berikutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(G)t - t + 1$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar

$\gamma_2(Amal(G,v,1)) = \gamma_2(G) \cdot 1 - 1 + 1$
$\Leftrightarrow \gamma_2(G) = \gamma_2(G)$

Asumsikan untuk $t = k$ adalah benar

$\gamma_2(Amal(G,v,k)) = \gamma_2(G)k - k + 1$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ juga benar

$$\begin{aligned} \gamma_2(Amal(G,v,k + 1)) &= \gamma_2(Amal(G,v,k)) + beda \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G)(k + 1) - (k + 1) + 1 &= \gamma_2(G)k - k + 1 + \gamma_2(G) - 1 \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k - 1 + 1 &= \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k \\ \Leftrightarrow \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k &= \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) - k \end{aligned}$$

Dengan demikian pada kasus $v \in S_2$ graf hasil operasi amalgamasi memiliki $\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(G)t - t + 1$.

Kasus 2. v bukan elemen S_2

Pada kasus dimana v bukan elemen S_2 untuk jumlah kopian ke-1 sampai kopian ke-t, bilangan dominasi jarak dua pada $Amal(G,v,t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

$t = 1 \rightarrow \gamma_2(G)$
$t = 2 \rightarrow 2\gamma_2(G)$
$t = 3 \rightarrow 3\gamma_2(G)$
$\vdots$
$t = t \rightarrow \gamma_2(G)t$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi sebanyak t kopi adalah $\gamma_2(G)t$. Berikutnya akan dibuktikan deret bilangan dominasi dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(G)t$

Akan dibuktikan ntuk $t = 1$ adalah benar

$\gamma_2(Amal(G,v,1)) = \gamma_2(G) \cdot 1$

$\Leftrightarrow \gamma_2(G) = \gamma_2(G)$

Asumsikan untuk $t = k$ adalah benar

$\gamma_2(Amal(G,v,k)) = \gamma_2(G)k$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ juga benar

$\gamma_2(Amal(G,v,k + 1)) = \gamma_2(Amal(G,v,k)) + beda$

$\Leftrightarrow \gamma_2(G)(k + 1) = \gamma_2(G)k + \gamma_2(G)$

$\Leftrightarrow \gamma_2(G)k + \gamma_2(G) = \gamma_2(G)k + \gamma_2(G)$

Dengan demikian pada kasus v bukan elemen S_2 graf hasil operasi amalgamasi memiliki $\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(G)t$.

Dari kasus 1 dan 2 dapat diketahui bahwa $\gamma_2(G)t - t + 1 \leq \gamma_2(G)t$ maka $\gamma_2\big(Amal(G,v,t)\big) = \gamma_2(G)t - t + 1$. Selanjutnya akan dibuktikan bahwa $\gamma_2(G)t - t + 1$ adalah jumlah simpul pendominasi minimal pada graf $Amal(G,v,t)$. Andaikan $\big|S_2\big(Amal(G,v,t)\big)\big| = \gamma_2(G)t - t + 1 - 1 = \gamma_2(G)t - t$ maka simpul maksimal yang dapat didominasi oleh $|S_2|$ adalah $1 + (N_1 + N_2)t\left(\left\lceil\frac{nt-t+1}{1+(N_1+N_2)t}\right\rceil - 1\right) \leq 1 + (N_1 + N_2)t\left(\frac{nt-t+1+(N_1+N_2)t}{1+(N_1+N_2)t} - 1\right) = nt - t$.

Dengan demikian tidak semua simpul dapat didominasi, dengan demikian $|S_2(Amal(G,v,t))| \neq \gamma_2(G)t - t$. Karena $\gamma_2(G)t - t + 1 - 1$ adalah jumlah simpul pendominasi yang minimal maka terbukti bahwa $\gamma_2(Amal(G,v,t)) = \gamma_2(G)t - t + 1$.

3. METODE PENELITIAN

Metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah pendeteksian pola, yaitu dengan cara mencari himpunan dominasi sedemikian hingga ditemukan bilangan kardinalitas yang minimum. Selain itu metode yang digunakan dalam penelitian ini adalah deduktif aksiomatik yaitu metode penelitian yang menggunakan prinsip-prinsip pembuktian deduktif yang berlaku dalam logika matematika dengan menggunakan aksioma atau teorema yang telah ada untuk memecahkan masalah.

Penelitian ini akan menghasilkan teorema-teorema baru yang telah dibuktikan secara deduktif sehingga kebenarannya berlaku secara umum.

4. HASIL DAN PEMBAHASAN

Pada hasil penelitian akan dibahas tentang bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi, diantaranya adalah graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal\,(H_n,v,t)$, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $Amal\ (Fl_n, v, t)$, dan graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship* atau $Amal\ (f_n, v, t)$.

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf Helm

Pada bagian ini akan ditunjukkan teorema mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal\ (H_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$.

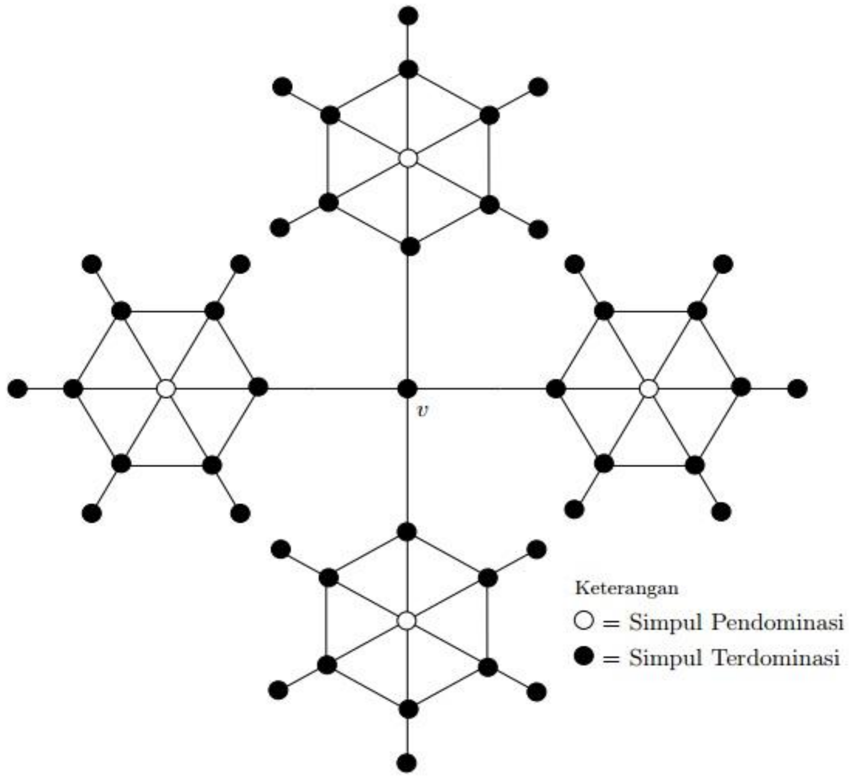
◊**Teorema 0.2** *Diberikan graf Helm H_n sebanyak t salinan dengan $t \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka hasil bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah $\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) = t$.*

Bukti. Diketahui $Amal(H_n, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf Helm H_n sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf Helm H_n memiliki $2n + 1$ simpul, maka $Amal(H_n, v, t)$ memiliki $2nt + 1$ simpul. Selanjutnya akan ditunjukkan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi $Amal(H_n, v, t)$ dengan barisan aritmatika yang dapat dilihat pada Tabel 1.

Table 1. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Amal(H_n, v, t)$

Jumlah Salinan (t)	**Bilangan Kardinalitas (γ_2)**
1	1
2	2
3	3
⋮	⋮
t	t

Untuk memperkuat bukti, disajikan contoh graf hasil operasi graf Helm seperti yang terlihat pada Gambar 1.



Gambar 1. Simpul Dominasi pada $Amal(H_6, v, 4)$

Maka dengan menggunakan barisan aritmatika akan didapatkan bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf Helm H_n adalah t. Berikutnya akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) = t$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal(H_n, v, 1)) = 1$

Akan dibuktikan untuk $t = k$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal(H_n, v, k)) = k$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ adalah benar.

$$\gamma_2(Amal(H_n, v, k + 1)) = \gamma_2(Amal(H_n, v, k)) + beda$$

$\Leftrightarrow \gamma_2(H_n)(k + 1) = k + 1$

$\Leftrightarrow \gamma_2(H_n)\, k + \gamma_2(H_n) = k + 1$

$\Leftrightarrow k + 1 = k + 1$

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa simpul pendominasi tersebut dapat mendominasi seluruh simpul $Amal(H_n, v, t)$ berdasarkan Lema 2 adalah $Amal(H_n, v, t) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+N_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2nt+1}{1+2n} \right\rceil = \lceil t \rceil$.

Selanjutnya akan ditunjukkan bahwa t adalah jumlah simpul pendominasi minimal. Andai $\gamma_2\big(Amal(H_n, v, t)\big) = t - 1$ maka banyak simpul maksimal yang akan didominasi adalah $1 + 2n\left(\left\lceil \frac{2nt+1}{1+2n} \right\rceil - 1\right) \leq 1 + 2n\left(\frac{2nt+1+2n}{1+2n} - 1\right) = 2nt$. Artinya banyak simpul yang didominasi adalah $2nt$, maka terdapat minimal satu simpul yang tidak didominasi. Dengan demikian $\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) \neq t - 1$, karena t adalah jumlah minimal simpul pendominasi maka $\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) = t$.

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf Bunga

Berikut ini akan dibahas bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $Amal\,(Fl_n, v, t)$ yang dapat dilihat pada Teorema 0.3.

◊**Teorema 0.3** *Diberikan graf Bunga Fl_n sebanyak t salinan dengan $t \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka hasil bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah* $\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = 1$.

Bukti. Diketahui $Amal(Fl_n, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf Bunga Fl_n sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf Bunga Fl_n memiliki $2n + 1$ simpul, maka $Amal\,(Fl_n, v, t)$ memiliki $2n + 1$ simpul.

Selanjutnya akan dibuktikan bilangan dominasi jarak dua pada graf $Amal(Fl_n, v, t)$ dengan membagi kedalam dua kasus sebagai berikut.

Kasus 1. $v \in S_2$

Pada kasus dimana $v \in S_2$ untuk jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke-t, $Amal(Fl_n, v, t)$ memiliki sebuah simpul pendominasi yang diletakkan pada simpul terminal sehingga $\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = 1$.

Kasus 2. $v \notin S_2$

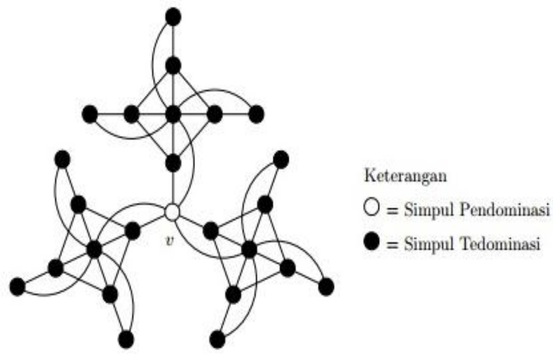
Pada kasus dimana $v \notin S_2$ untuk salinan ke-1 sampai salinan ke-t, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Amal(Fl_n, v, t)$ akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 2. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Amal(Fl_n, v, t)$

Jumlah Salinan (t)	**Bilangan Kardinalitas (γ_2)**
1	1
2	2
3	3
⋮	⋮
t	t

Maka dengan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf Bunga Fl_n adalah t.

Untuk memperkuat bukti, disajikan contoh graf hasil operasi graf Bunga seperti yang terlihat pada Gambar 2.



Gambar 2. Simpul Dominasi pada$Amal(Fl_4, v, 3)$

Berikut akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = t$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, 1)) = 1$

Akan dibuktikan untuk $t = k$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, k)) = k$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ adalah benar.

$$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, k + 1)) = \gamma_2(Amal(Fl_n, v, k)) + beda$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(Fl_n)(k + 1) = k + 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(Fl_n)\, k + \gamma_2(Fl_n) = k + 1$$

$$\Leftrightarrow k + 1 = k + 1$$

Dengan demikian pada kasus $v \notin S_2 \gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = t$.

Dari kasus 1 dan kasus 2 dapat diketahui bahwa $t \leq 1$ maka $\gamma_2(Amal(Fl_n, v, 1)) = 1$, karena berdasarkan definisi bilangan kardinalitas adalah jumlah minimal dari simpul pendominasi.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa simpul pendominasi tersebut dapat mendominasi seluruh simpul $Amal(Fl_n, v, t)$ berdasarkan Lema 2 adalah $\gamma_2\big(Amal(Fl_n, v, t)\big) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+N_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2nt+1}{2nt+1} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1$.

Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi Amalgamasi Graf *Friendship*

Berikut ini akan dibahas bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship* atau $Amal\ (f_n, v, t)$yang dapat dilihat pada Teorema 0.4.

◊**Teorema 0.4** *Diberikan graf Friendship f_n sebanyak t salinan dengan $t \geq 2$ dan $n \geq 3$, maka hasil bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi adalah*$\gamma_2(Amal\ (f_n, v, t)) = 1$.

Bukti. Diketahui $Amal\ (f_n, v, t)$ merupakan hasil operasi amalgamasi dari graf Friendship f_n sebanyak t salinan dengan v adalah simpul terminal. Jika sebuah graf Friendship f_n memiliki $2n + 1$ simpul, maka $Amal\ (f_n, v, t)$ memiliki $2nt + 1$ simpul.

Kasus 1. $v \in S_2$

Pada kasus dimana $v \in S_2$ untuk jumlah salinan ke-1 sampai salinan ke-t, $Amal\ (f_n, v, t)$ memiliki sebuah simpul pendominasi yang diletakkan pada simpul terminal sehingga $\gamma_2(\mathrm{Amal}\ (\mathrm{f_n}, \mathrm{v}, \mathrm{t})) = 1$.

Kasus 2. $v \notin S_2$

Pada kasus dimana $v \notin S_2$untuk salinan ke-1 sampai salinan ke-t, bilangan dominasi jarak dua pada graf $Amal\ (f_n, v, t)$akan membentuk barisan aritmatika sebagai berikut.

Tabel 3. Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi $Amal\ (f_n, v, t)$

Jumlah Salinan $(\boldsymbol{t})$	**Bilangan Kardinalitas** $(\boldsymbol{\gamma_2})$
1	1
2	2
3	3
⋮	⋮
t	t

Maka dengan barisan aritmatika akan didapat bilangan dominasi jarak dua dari graf hasil operasi amalgamasi pada graf *Friendship* f_n adalah t. Berikut akan dibuktikan bilangan dominasi tersebut dengan menggunakan induksi matematika sebagai berikut.

$\gamma_2(Amal\ (f_n, v, t)) = t$

Akan dibuktikan untuk $t = 1$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal\ (f_n, v, 1)) = 1$

Akan dibuktikan untuk $t = k$ adalah benar.

$\gamma_2(Amal\ (f_n, v, k)) = k$

Akan dibuktikan untuk $t = k + 1$ adalah benar.

$$\gamma_2(Amal\ (f_n, v, k + 1)) = \gamma_2(Amal\ (f_n, v, k)) + beda$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(f_n)(k + 1) = k + 1$$

$$\Leftrightarrow \gamma_2(f_n)\ k + \gamma_2(f_n) = k + 1$$

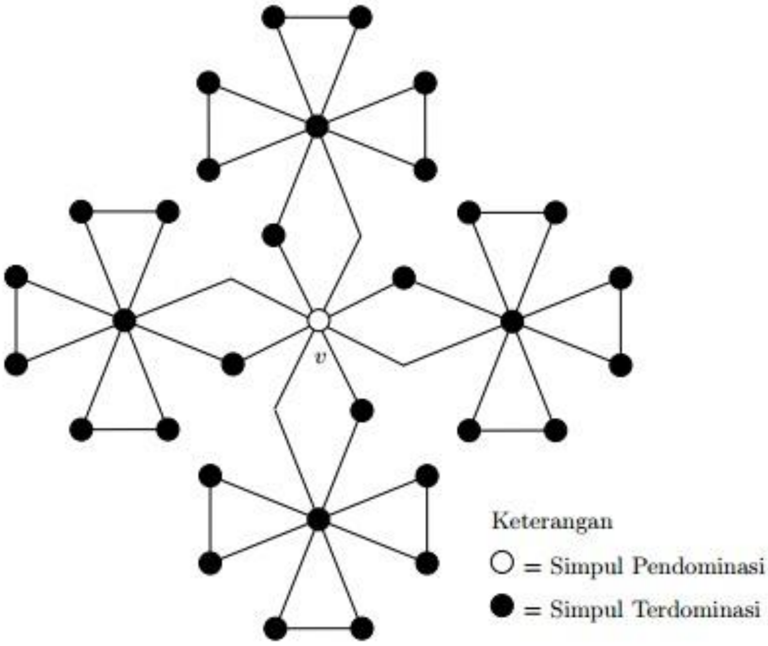
$$\Leftrightarrow k + 1 = k + 1$$

Dengan demikian pada kasus $v \notin S_2 \gamma_2(Amal\ (f_n, v, t)) = t.$

Dari kasus 1 dan kasus 2 dapat diketahui bahwa $t \leq 1$ maka $\gamma_2(Amal\ (f_n, v, t)) = 1$, karena berdasarkan definisi bilangan kardinalitas adalah jumlah minimal dari simpul pendominasi.

Selanjutnya akan dibuktikan bahwa simpul pendominasi tersebut dapat mendominasi seluruh simpul $Amal\ (f_n, v, t)$ berdasarkan Lema 2 adalah $\gamma_2(Amal\ (f_n, v, t)) \geq \left\lceil \frac{|V|}{1+\Delta(G)+N_2} \right\rceil = \left\lceil \frac{2nt+1}{2nt+1} \right\rceil = \lceil 1 \rceil = 1.$

Untuk memperkuat bukti, disajikan contoh graf hasil operasi graf *Friendship* seperti yang terlihat pada Gambar 3.



Gambar 3. Simpul Dominasi pada $Amal\ (f_4, v, 4)$

5. KESIMPULAN DAN SARAN

Kesimpulan yang diperoleh berdasarkan analisis dan pembahasan adalah sebagai berikut :

1. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Helm atau $Amal(H_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah $\gamma_2(Amal(H_n, v, t)) = t$.
2. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga atau $Amal(Fl_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah$\gamma_2(Amal(Fl_n, v, t)) = 1$.
3. Bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship* atau $Amal(f_n, v, t)$ dengan $n \geq 3$ dan $t \geq 2$ adalah $\gamma_2(Amal(f_n, v, t)) = 1$.

Berdasarkan hasil penelitian mengenai bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi amalgamasi, diantaranya adalah graf hasil operasi amalgamasi graf Helm, graf hasil operasi amalgamasi graf Bunga, graf hasil operasi amalgamasi graf *Friendship*. Maka penelitian selanjutnya dapat dikembangkan dengan menentukan bilangan dominasi jarak dua pada graf hasil operasi lainnya.

DAFTAR PUSTAKA

Carlson, K. 2006. *Generalized Books and Cm-Snakes are Prime Graphs*. Ars Combinatoria.

Darmaji dan Umilasari, R. 2014. "*Dominating Set Berjarak Dua pada Graf Jahangir dan Prisma*". Tidak Diterbitkan. Paper. Surabaya: ITS.

Harary, F. dan Frucht, R. 1969. *Graph Theory*. Philippines: Addison-Wesley Publishing Company, Inc.

Haynes, T. W., Hedetniemi, S. T., dan Slater, P. J. 1996. *Fundamental of Dominations in Graphs*. New York: Marcel Dekker, Inc.

Hedetniemi, S. T., Laskar, R., dan Pfaff, J. 1986. *A Linear Algorithm for Finding a Minimum Dominating Set in Cactus*. Discrete Applied Mathematics in North Holland. 13:

287-292.

Maryati, Salman, Baskoro, Ryan, dan Miller. 2010. *On H-supermagic Labelings for Certain Shackles and Amalgamations of a Connected Graph*. Utilitas Mathematica. 83: 333-342.

Munir, R. 2004. *Algoritma Greedy*. Departemen Teknik Informatika Institut Teknologi Bandung.

Sridharan, N., Subramanian, V. S. A dan Elias, M. D. 2002. *Bounds on the Distance Two-Domination Number of Graph. Graphs and Combinatorics*. 18: 667-675.

Umilasari, R. 2015. ”*Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf-graf Hasil Operasi Korona dan Comb*”. Tidak Diterbitkan. Tesis. Surabaya: ITS.

Vikade, W. D. 2016. ”*Bilangan Dominasi Jarak Dua pada Graf Hasil Operasi*”. Tidak Diterbitkan. Tesis. Jember: Universitas Jember